２０２５ 入試対策

２次数学ランドマーク

整数と数列54題

文系＋理系 27か年

１９９８ － ２０２４

外林 康治　編著

電送数学舎

整数と数列

【問題一覧】

（注）問題番号が，対応する解答例へのハイパーリンクになっています。

1 正の整数 n を 8 で割った余りを $r(n)$ とおく。正の整数の組 $(a,\ b)$ は，条件 $0<a-r(a)<\dfrac{4}{3}r(b)$，$0<b-r(b)<\dfrac{4}{3}r(ab)$ をみたすとする。

(1) $a-r(a)$ と $r(b)$ を求めよ。

(2) a と b を求めよ。 ［1998 一橋大・文］

2 正の整数の組 $(a,\ b)$ で，a 以上 b 以下の整数の総和が 500 となるものをすべて求めよ。ただし，$a<b$ とする。 ［1999 大阪大・文］

3 p,q は素数で，$p<q$ とする。

(1) $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$ を満たす整数 r は存在しないことを示せ。

(2) $\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$ を満たす整数 r が存在するのは，$p=2$，$q=3$ のときに限ることを示せ。 ［1999 一橋大・文］

4 0 以上の整数 x に対して，$C(x)$ で x の下 2 桁を表すことにする。たとえば，$C(12578)=78$，$C(6)=6$ である。n を 2 でも 5 でも割り切れない正の整数とする。

(1) $x,\ y$ が 0 以上の整数のとき，$C(nx)=C(ny)$ ならば，$C(x)=C(y)$ であることを示せ。

(2) $C(nx)=1$ となる 0 以上の整数 x が存在することを示せ。 ［1999 京都大・文］

5 どのような負でない 2 つの整数 m と n を用いても，$x=3m+5n$ とは表すことができない正の整数 x をすべて求めよ。 ［2000 大阪大・理］

6 次の問いに答えよ。

(1) 整数 $n\geqq 3$ に対して，${}_n\mathrm{C}_3=\displaystyle\sum_{k=3}^{n}{}_{k-1}\mathrm{C}_2$ が成り立つことを示せ。

(2) 整数 $k\geqq 3$ に対して，$x+y+z=k$ を満たす自然数 $x,\ y,\ z$ の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数は $\dfrac{1}{2}(k-1)(k-2)$ であることを示せ。

(3) 整数 $m\geqq 0$ に対して，$x+y+z\leqq m$ を満たす負でない整数 $x,\ y,\ z$ の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数を，(1)，(2)を用いて求めよ。 ［2000 金沢大・理］

7 実数 x_1，…，x_n $(n \geqq 3)$ が条件 $x_{k-1}-2x_k+x_{k+1}>0$ $(2 \leqq k \leqq n-1)$ を満たすとし，x_1，…，x_n の最小値を m とする。このとき，$x_l=m$ となる $l(1 \leqq l \leqq n)$ の個数は 1 または 2 であることを示せ。 ［2000 京都大・文］

8 数列 $\{a_n\}$ において，各項 a_n が $a_n \geqq 0$ をみたし，かつ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{1}{2}$ が成り立つとする。さらに各 n に対し

$$b_n=(1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_n),\ c_n=1-(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)$$

とおく。

(1) すべての n に対し不等式 $b_n \geqq c_n$ が成り立つことを，数学的帰納法で示せ。

(2) ある n について $b_{n+1}=c_{n+1}$ が成り立てば，$b_n=c_n$ となることを示せ。

(3) $b_3=\dfrac{1}{2}$ となるとき，$c_3=\dfrac{1}{2}$ であることを示せ。また $b_3=\dfrac{1}{2}$ となる数列 $\{a_n\}$ は全部で何種類あるかを求めよ。 ［2001 大阪大・理］

9 n を 2 以上の整数とする。実数 a_1，a_2，…，a_n に対し，$S=a_1+a_2+\cdots+a_n$ とおく。$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ について，不等式 $-1<S-a_k<1$ が成り立っているとする。

$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n$ のとき，すべての k について $|a_k|<2$ が成り立つことを示せ。

［2001 京都大・文］

10 4 個の整数 1, a, b, c は $1<a<b<c$ を満たしている。これらの中から相異なる 2 個を取り出して和を作ると，$1+a$ から $b+c$ までのすべての整数の値が得られるという。a, b, c の値を求めよ。 ［2002 京都大・文］

11 p は 3 以上の素数であり, x, y は $0 \leqq x \leqq p$, $0 \leqq y \leqq p$ を満たす整数であるとする。このとき x^2 を $2p$ で割った余りと，y^2 を $2p$ で割った余りが等しければ，$x=y$ であることを示せ。 ［2003 京都大・文］

12 素数 p, q に対して，$a_n=p^n-4(-q)^n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって整数 a_n を定める。ただし，$p>2q$ とする。

(1) a_1 と a_2 が 1 より大きい公約数 m をもつならば，$m=3$ であることを示せ。

(2) a_n がすべて 3 の倍数であるような p, q のうちで積 pq が最小となるものを求めよ。 ［2004 大阪大・理］

13 n, a, b を 0 以上の整数とする。a, b を未知数とする方程式

$$(*) \quad a^2 + b^2 = 2^n$$

を考える。

(1) $n \geqq 2$ とする。a, b が方程式$(*)$を満たすならば, a, b はともに偶数であることを証明せよ。（ただし, 0 は偶数に含める。）

(2) 0 以上の整数 n に対して, 方程式$(*)$を満たす 0 以上の整数の組$(a,\ b)$をすべて求めよ。 ［2004 京都大・文］

14 3 以上 9999 以下の奇数 a で, $a^2 - a$ が 10000 で割り切れるものをすべて求めよ。 ［2005 東京大］

15 2 以上の自然数 n に対し, n と$n^2 + 2$がともに素数になるのは$n = 3$の場合に限ることを示せ。 ［2006 京都大・理］

16 次の条件を満たす組$(x,\ y,\ z)$を考える。

条件(A)：x, y, z は正の整数で, $x^2 + y^2 + z^2 = xyz$ および $x \leqq y \leqq z$ を満たす。

以下の問いに答えよ。

(1) 条件(A)を満たす組$(x,\ y,\ z)$で, $y \leqq 3$ となるものをすべて求めよ。

(2) 組$(a,\ b,\ c)$が条件(A)を満たすとする。このとき, 組$(b,\ c,\ z)$が条件(A)を満たすような z が存在することを示せ。

(3) 条件(A)を満たす組$(x,\ y,\ z)$は, 無数に存在することを示せ。 ［2006 東京大・理］

17 p を 3 以上の素数とする。4 個の整数 a, b, c, d が次の 3 条件

$$a + b + c + d = 0,\ \ ad - bc + p = 0,\ \ a \geqq b \geqq c \geqq d$$

を満たすとき, a, b, c, d を p を用いて表せ。 ［2007 京都大］

18 以下の問いに答えよ。

(1) x を有理数とする。$7x^2$ が整数ならば, x は整数であることを示せ。

(2) a, b を整数とする。$a^2 - 7b^2$ が 4 の倍数ならば, a と b はともに偶数であることを示せ。

(3) r は整数, s は有理数とする。$\left(\dfrac{r}{2}\right)^2 - 7s^2$ が整数ならば, s は整数であることを示せ。

［2008 千葉大］

19 p を素数, n を正の整数とするとき, $(p^n)!$ は p で何回割り切れるか。

［2009 京都大・文］

20 t を実数として, 数列 a_1, a_2, $\cdots$ を

$$a_1=1,\ a_2=2t,\ a_{n+1}=2ta_n-a_{n-1}\quad (n\geqq 2)$$

で定める。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) $t\geqq 1$ ならば, $0<a_1<a_2<a_3<\cdots$ となることを示せ。

(2) $t\leqq -1$ ならば, $0<|a_1|<|a_2|<|a_3|<\cdots$ となることを示せ。

(3) $-1<t<1$ ならば, $t=\cos\theta$ となる θ を用いて,

$$a_n=\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\quad (n\geqq 1)$$

となることを示せ。

［2009 神戸大・理］

21 4 で割ると余りが 1 である自然数全体の集合を A とする。すなわち,

$$A=\{4k+1 \mid k\text{は}0\text{以上の整数}\}$$

とする。次の問いに答えよ。

(1) x および y が A に属するならば, その積 xy も A に属することを証明せよ。

(2) 0 以上の偶数 m に対して, 3^m は A に属することを証明せよ。

(3) m, n を 0 以上の整数とする。$m+n$ が偶数ならば 3^m7^n は A に属し, $m+n$ が奇数ならば 3^m7^n は A に属さないことを証明せよ。

(4) m, n を 0 以上の整数とする。$3^{2m+1}7^{2n+1}$ の正の約数のうち A に属する数全体の和を m と n を用いて表せ。

［2010 広島大・理］

22 a, b は $a\geqq b>0$ を満たす整数とし, x と y の 2 次方程式

$$x^2+ax+b=0,\ y^2+by+a=0$$

がそれぞれ整数解をもつとする。

(1) $a=b$ とするとき, 条件を満たす整数 a をすべて求めよ。

(2) $a>b$ とするとき, 条件を満たす整数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。

［2011 名古屋大・理］

23 すべての項が整数である数列を整数列という。$p,\ q,\ r,\ s$ を実数とし，正の整数 n に対し，

$$a_n = p + qn + rn^2,\ \ b_n = p + qn + rn^2 + sn^3$$

とおく。このとき以下の命題を示せ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ が整数列ならば，$2r$ は整数である。

(2) 数列 $\{b_n\}$ が整数列であるための必要十分条件は，p と $q + r + s$ と $2r$ と $6s$ がいずれも整数となることである。 ［2012 千葉大・医］

24 4 個の整数 $n+1$，n^3+3，n^5+5，n^7+7 がすべて素数となるような正の整数 n は存在しない。これを証明せよ。 ［2013 大阪大・理］

25 n と k を自然数とし，整式 x^n を整式 $(x-k)(x-k-1)$ で割った余りを $ax+b$ とする。

(1) a と b は整数であることを示せ。

(2) a と b をともに割り切る素数は存在しないことを示せ。 ［2013 京都大・文］

26 n を自然数とし，整式 x^n を整式 x^2-2x-1 で割った余りを $ax+b$ とする。このとき a と b は整数であり，さらにそれらをともに割り切る素数は存在しないことを示せ。 ［2013 京都大・理］

27 次の問いに答えよ。

(1) 任意の自然数 a に対し，a^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 であることを証明せよ。

(2) 自然数 $a,\ b,\ c$ が $a^2+b^2=3c^2$ を満たすと仮定すると，$a,\ b,\ c$ はすべて 3 で割り切れなければならないことを証明せよ。

(3) $a^2+b^2=3c^2$ を満たす自然数 $a,\ b,\ c$ は存在しないことを証明せよ。［2014 九州大］

28 $a-b-8$ と $b-c-8$ が素数となるような素数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ。

［2014 一橋大・文］

29 rを0以上の整数とし，数列$\{a_n\}$を次のように定める。

$$a_1=r,\ a_2=r+1,\ a_{n+2}=a_{n+1}(a_n+1)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

また，素数pを1つとり，a_nをpで割った余りをb_nとする。ただし，0をpで割った余りは0とする。

(1) 自然数nに対し，b_{n+2}は$b_{n+1}(b_n+1)$をpで割った余りと一致することを示せ。

(2) $r=2$，$p=17$の場合に，10以下のすべての自然数nに対して，b_nを求めよ。

(3) ある2つの相異なる自然数n, mに対して，

$$b_{n+1}=b_{m+1}>0,\ b_{n+2}=b_{m+2}$$

が成り立ったとする。このとき，$b_n=b_m$が成り立つことを示せ。

(4) a_2，a_3，a_4，$\cdots$にpで割り切れる数が現れないとする。このとき，a_1もpで割り切れないことを示せ。 [2014 東京大・理]

30 以下の問いに答えよ。

(1) nが正の偶数のとき，2^n-1は3の倍数であることを示せ。

(2) nを自然数とする。2^n+1と2^n-1は互いに素であることを示せ。

(3) p, qを異なる素数とする。$2^{p-1}-1=pq^2$を満たすp, qの組をすべて求めよ。

[2015 九州大・理]

31 数列$\{p_n\}$を次のように定める。

$$p_1=1,\ p_2=2,\ p_{n+2}=\frac{{p_{n+1}}^2+1}{p_n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) $\dfrac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_{n+1}p_n}$が$n$によらないことを示せ。

(2) すべての$n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$に対し，$p_{n+1}+p_{n-1}$をp_nのみを使って表せ。

(3) 数列$\{q_n\}$を次のように定める。

$$q_1=1,\ q_2=1,\ q_{n+2}=q_{n+1}+q_n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

すべての$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$に対し，$p_n=q_{2n-1}$を示せ。 [2015 東京大・理]

32 x, yを自然数とする。

(1) $\dfrac{3x}{x^2+2}$が自然数であるようなxをすべて求めよ。

(2) $\dfrac{3x}{x^2+2}+\dfrac{1}{y}$が自然数であるような組$(x,\ y)$をすべて求めよ。 [2016 北海道大・文]

33 以下の問いに答えよ。ただし，(1)については，結論のみを書けばよい。

(1) n を正の整数とし，3^n を 10 で割った余りを a_n とする。a_n を求めよ。

(2) n を正の整数とし，3^n を 4 で割った余りを b_n とする。b_n を求めよ。

(3) 数列 $\{x_n\}$ を次のように定める。

$$x_1 = 1,\ x_{n+1} = 3^{x_n} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

x_{10} を 10 で割った余りを求めよ。 [2016 東京大・文]

34 自然数 n に対して，10^n を 13 で割った余りを a_n とおく。a_n は 0 から 12 までの整数である。以下の問いに答えよ。

(1) a_{n+1} は $10a_n$ を 13 で割った余りに等しいことを示せ。

(2) $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_6$ を求めよ。

(3) 以下の 3 条件を満たす自然数 N をすべて求めよ。

(i) N を十進法で表示したとき 6 桁となる。

(ii) N を十進法で表示して，最初と最後の桁の数字を取り除くと 2016 となる。

(iii) N は 13 で割り切れる。 [2016 九州大]

35 以下の問いに答えよ。

(1) 6 以上の整数 n に対して不等式 $2^n > n^2 + 7$ が成り立つことを数学的帰納法により示せ。

(2) 等式 $p^q = q^p + 7$ を満たす素数の組 $(p,\ q)$ をすべて求めよ。 [2016 東北大・理]

36 素数 p, q を用いて，$p^q + q^p$ と表される素数をすべて求めよ。 [2016 京都大・理]

37 正の整数 n に対して，その(1 と自分自身も含めた)すべての正の約数の和を $s(n)$ とかくことにする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) k を正の整数，p を 3 以上の素数とするとき，$s(2^k p)$ を求めよ。

(2) $s(2016)$ を求めよ。

(3) 2016 の正の約数 n で，$s(n) = 2016$ となるものをすべて求めよ。

[2016 名古屋大・文]

38 $p=2+\sqrt{5}$ とおき，自然数 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$a_n=p^n+\left(-\dfrac{1}{p}\right)^n$ と定める。以下の問いに答えよ。ただし設問(1)は結論のみを書けばよい。

(1) a_1，a_2 の値を求めよ。

(2) $n\geqq 2$ とする。積 a_1a_n を，a_{n+1} と a_{n-1} を用いて表せ。

(3) a_n は自然数であることを示せ。

(4) a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ。 ［2017 東京大］

39 以下の問いに答えよ。

(1) n を自然数とするとき，2^n を 7 で割った余りを求めよ。

(2) 自然数 m は，2 進法で 101 が 6 回連続する表示 $101101101101101101_{(2)}$ をもつとする。m を 7 で割った余りを求めよ。 ［2018 九州大・文］

40 整数 a, b は等式 $3^a-2^b=1$ ……①を満たしているとする。

(1) a, b はともに正となることを示せ。

(2) $b>1$ ならば，a は偶数であることを示せ。

(3) ①を満たす整数の組 $(a,\ b)$ をすべてあげよ。 ［2018 東北大・理］

41 次の問いに答えよ。

(1) 2^n-1 が 3 で割り切れるような自然数 n をすべて求めよ。

(2) n^n-1 が 3 で割り切れるような自然数 n をすべて求めよ。 ［2019 信州大・医］

42 正の整数 n の正の平方根 $\sqrt{n}$ は整数ではなく，それを 10 進法で表すと，小数第 1 位は 0 であり，第 2 位は 0 以外の数であるとする。

(1) このような n の中で最小のものを求めよ。

(2) このような n を小さいものから順に並べたときに 10 番目にくるものを求めよ。

［2019 名古屋大・理］

43 p を自然数とする。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=1,\ a_2=p^2,\ a_{n+2}=a_{n+1}-a_n+13\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める。数列 $\{a_n\}$ に平方数でない項が存在することを示せ。 ［2019 一橋大・文］

44 xy 平面において $x,\ y$ がともに整数となる点 $(x,\ y)$ を格子点という。正の整数 n に対して，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x+y \leqq n$ で定まる領域を D とする。4 つの頂点がすべて D に含まれる格子点であり，x 軸と平行な辺をもつ長方形の数を $R(n)$ とする。また，そのなかで特に 1 つの辺が x 軸上にある長方形の数を $S(n)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $R(3)$ と $R(4)$ を求めよ。

(2) $S(n)$ を求めよ。

(3) $R(n)$ を求めよ。

(4) $R(n)=1001$ となる n を求めよ。 [2020 名古屋大・文]

45 実数 x に対し，x を超えない最大の整数を $[\,x\,]$ で表す。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_k = 2^{[\sqrt{k}]} \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定義する。正の整数 n に対して，$b_n = \sum_{k=1}^{n^2} a_k$ を求めよ。 [2021 一橋大・文]

46 以下の問いに答えよ。

(1) n が整数のとき，n を 6 で割ったときの余りと n^3 を 6 で割ったときの余りは等しいことを示せ。

(2) 整数 $a,\ b,\ c$ が条件(＊)：$a^3+b^3+c^3=(c+1)^3$ を満たすとき，$a+b$ を 6 で割った余りは 1 であることを示せ。

(3) $1 \leqq a \leqq b \leqq c \leqq 10$ を満たす整数の組 $(a,\ b,\ c)$ で，(2)の条件(＊)を満たすものをすべて求めよ。 [2021 岡山大]

47 m を正の整数とする。座標平面上の点 $(x,\ y)$ で，xn^3+yn^2 $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ がすべて整数であるようなものは，連立不等式 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x+y \leqq m$ の表す領域に何個あるか答えよ。 [2021 千葉大・理]

48 自然数 n の正の約数全体の集合を A_n とし，A_n のすべての要素の逆数の 2 乗の和を s_n とする。例えば,

$$A_3=\{1,\ 3\},\ s_3=1+\frac{1}{3^2},\ A_4=\{1,\ 2,\ 4\},\ s_4=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}$$

である。p と q は異なる素数とし，k と l は自然数とする。次の問いに答えよ。

(1) s_8，s_{12} の値を求めよ。

(2) $n=p^k$ について，A_n の要素の個数を求めよ。

(3) $n=p^kq^l$ について，$s_n<\dfrac{3}{2}$ を示せ。 ［2022 金沢大 理］

49 n を自然数とする。3 つの整数 n^2+2，n^4+2，n^6+2 の最大公約数 A_n を求めよ。 ［2022 京都大 理］

50 $a_1=a_2=1$ を満たす数列 $\{a_n\}$ について，次の 2 つの条件 p と q が同値であることを示せ。

p：すべての自然数 n に対して，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ が成り立つ。

q：すべての自然数 n に対して，${a_{n+1}}^2-a_{n+2}\,a_n=(-1)^n$ が成り立つ。

［2022 信州大 医］

51 方程式 $(x^3-x)^2(y^3-y)=86400$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。

［2023 東京工業大・理］

52 x 座標, y 座標がともに整数である座標平面上の点を格子点と呼ぶことにする。座標平面上の 3 点を頂点にもつ三角形上の格子点とは, 頂点, 辺または内部に含まれている格子点のことをいう。四角形に対しても同様に四角形上の格子点を定めるものとする。$O(0,\ 0)$ を座標平面上の原点とする。a と b を互いに素な自然数, n を自然数として, 座標平面上の点 $P_n(an,\ 0)$, $Q_n(0,\ bn)$ を考える。次の問いに答えよ。

(1) 直線 P_nQ_n 上の格子点 $(x,\ y)$ で $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ を満たすものは, $(ak,\ b(n-k))$ $(k=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$ のみであることを示せ。

(2) P_1 と Q_1 をそれぞれ P, Q と表す。点 $R(a,\ b)$ に対し, 長方形 OPRQ 上の格子点の個数を a と b を用いて表せ。また, 三角形 OPQ 上の格子点の個数を a と b を用いて表せ。

(3) 三角形 OP_nQ_n 上の格子点の個数を a, b, n を用いて表せ。

(4) 座標空間内の原点 $O(0,\ 0,\ 0)$ と 3 点 $X(an,\ 0,\ 0)$, $Y(0,\ bn,\ 0)$, $Z(0,\ 0,\ n)$ をとる。点 O, X, Y, Z を 4 頂点とする四面体 OXYZ 上の格子点の個数を a, b, n を用いて表せ。ただし, x 座標, y 座標, z 座標のすべてが整数である座標空間内の点を格子点と呼ぶことにする。また, 四面体上の格子点とは, 頂点, 辺, 面または内部に含まれている格子点のことをいう。

［2024 広島大 理］

53 与えられた自然数 a_0 に対して, 自然数からなる数列 a_0, a_1, a_2, $\cdots$ を次のように定める。

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{2} & (a_n\text{ が偶数のとき})\\[2mm] \dfrac{3a_n+1}{2} & (a_n\text{ が奇数のとき})\end{cases}$$

次の問いに答えよ。

(1) a_0, a_1, a_2, a_3 がすべて奇数であるような最小の自然数 a_0 を求めよ。

(2) a_0, a_1, $\cdots$, a_{10} がすべて奇数であるような最小の自然数 a_0 を求めよ。

［2024 京都大 理］

54 n を 2 以上の自然数とする。自然数の組$(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$を解とする方程式

$$(*) \quad a_1+a_2+\cdots+a_n=a_1\times a_2\times\cdots\times a_n$$

を考えるとき，以下の各問いに答えよ。

(1) $n=3$ のとき，$(*)$の解$(a_1,\ a_2,\ a_3)$のうち，$a_1\leqq a_2\leqq a_3$ を満たすものをすべて求めよ。

(2) $n\geqq 3$ のとき，$(*)$の任意の解$(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$において，$a_i=1$ となる i が少なくとも 1 つ存在することを示せ。

(3) $(*)$のある解$(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$において，$a_i=1$ となる i がちょうど 2 個存在しているとする。このとき，n のとり得る値をすべて求めよ。 ［2024 東京医科歯科大 医］

整数と数列

【解答例と解説】

（注）問題番号が，対応する問題ページへのハイパーリンクになっています。

$\boxed{1}$ ［1998 一橋大・文］

$0 < a - r(a) < \dfrac{4}{3}r(b)$ ………①　　$0 < b - r(b) < \dfrac{4}{3}r(ab)$ ………②とする。

(1)　$0 \leqq r(b) \leqq 7$ から，$0 \leqq \dfrac{4}{3}r(b) \leqq \dfrac{28}{3} < 10$

①より，$0 < a - r(a) < 10$

また，$a - r(a)$ が 8 の倍数となることを考えあわせて，$a - r(a) = 8$ ………③

すると，①より $8 < \dfrac{4}{3}r(b)$ となり，$6 < r(b)$

$0 \leqq r(b) \leqq 7$ から，$r(b) = 7$

(2)　(1)と同様にして，②より，$b - r(b) = 8$ ………④，$r(ab) = 7$ ………⑤

④より，$b = r(b) + 8 = 15$

⑤より，$r(15a) = 7$

よって，$15a = 8k + 7$（k は自然数）となり，

$$15(a-1) = 8(k-1)$$

15 と 8 は互いに素より，$a-1$ は 8 の倍数となり，l を整数として，

$$a - 1 = 8l,\quad a = 8l + 1$$

すなわち，$r(a) = 1$

③より，$a = r(a) + 8 = 9$

［解 説］

不等式の処理が難しそうですが，(1)(2)とも誘導が丁寧についているため，見かけほどではありません。なお，(2)の後半の式変形は，不定方程式の解を求める常套手段の一つです。

$\boxed{2}$ ［1999 大阪大・文］

a 以上 b 以下の整数の総和は $\dfrac{a+b}{2}(b-a+1)$ なので，条件より，

$$\frac{a+b}{2}(b-a+1)=500,\ \ (a+b)(b-a+1)=1000$$

$1\leqq a<b$ より，$2\leqq b-a+1<a+b$ ………(＊)

また，$(b-a+1)+(a+b)=2b+1$ で，和が奇数となることより，$b-a+1$ と $a+b$ の偶奇は一致しない。

以上より，$1000=2^3\cdot 5^3$ なので，(＊)を満たし 1000 を一方が偶数，他方が奇数の 2 つの数の積として表すと，

$$(b-a+1,\ a+b)=(2^3,\ 5^3),\ (5^2,\ 2^3\cdot 5),\ (5,\ 2^3\cdot 5^2)$$

(i) $(b-a+1,\ a+b)=(2^3,\ 5^3)$ のとき

$b-a=7$，$a+b=125$ より，$(a,\ b)=(59,\ 66)$

(ii) $(b-a+1,\ a+b)=(5^2,\ 2^3\cdot 5)$ のとき

$b-a=24$，$a+b=40$ より，$(a,\ b)=(8,\ 32)$

(iii) $(b-a+1,\ a+b)=(5,\ 2^3\cdot 5^2)$ のとき

$b-a=4$，$a+b=200$ より，$(a,\ b)=(98,\ 102)$

［解 説］

1000 の正の約数は，全部で 16 個になりますが，一つ一つチェックしていくのはたいへんです。条件に適する候補を絞ることについては，$a+b$ と $b-a+1$ の和が奇数となることに注目してみました。

3 ［1999 一橋大・文］

(1) $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$ より，$\dfrac{p+q}{pq}=\dfrac{1}{r}$，$(p+q)r=pq$ ………①

ここで，$p+q$ と pq が 2 以上の公約数 m をもつとすると，a，b を自然数として，$p+q=ma$，$pq=mb$ と表される。すると，この式をまとめて $p(ma-p)=mb$ より $p^2=m(ap-b)$，$q(ma-q)=mb$ より $q^2=m(aq-b)$ となり，p^2 と q^2 は 2 以上の公約数 m をもつ。これは，p，q が素数ということに反する。よって，$p+q$ と pq は互いに素である。

すると，①より r が pq の倍数となるので，k を整数として $r=kpq$ と表せる。

①に代入して $(p+q)k=1$ ………②

p，q は $p<q$ を満たす素数なので，$p+q\geqq 2+3=5$ となり，②を満たす整数 k は存在しない。

よって，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$ を満たす整数 r は存在しない。

(2) $\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$ より，$\dfrac{q-p}{pq}=\dfrac{1}{r}$，$(q-p)r=pq$ ………③

(1)と同様にして，$q-p$ と pq は互いに素であるので，③より r が pq の倍数となり，l を整数として $r=lpq$ と表せる。

③に代入して $(q-p)l=1$ ………④

④より $q-p$ は 1 の約数となり，$p<q$ より $q-p=1$

これより，p，q の一方が偶数，他方が奇数となるが，偶数の素数は 2 しかないので，$p=2$，$q=3$ となる。このとき $r=6$ となり適する。

よって，$\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$ を満たす整数 r が存在するのは，$p=2$，$q=3$ のときに限る。

［解 説］

大小関係からとりうる値の範囲を絞り込んでいくことをまず考えました。ところがそれではうまく証明できなかったので，p，q が素数という条件をもとに考え直しました。

$\boxed{4}$ ［1999 京都大・文］

(1) $C(x)$はxを 100 で割った余りなので，$C(nx)=C(ny)$より，$nx-ny$は 100 の倍数となる。すると, kを整数として,

$$n(x-y)=100k$$

nは 2 でも 5 でも割り切れない正の整数なので, nと$100=2^2\cdot5^2$は互いに素である。

よって，$x-y$が 100 の倍数となり，$C(x)=C(y)$が成立する。

(2) (1)の命題の対偶をとると,

$$C(x)\neq C(y)\text{ ならば，}C(nx)\neq C(ny)\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$C(x)=r_x$，$C(y)=r_y$とおくと, p, qを 0 以上の整数として,

$$x=100p+r_x,\ \ y=100q+r_y$$

$$nx=100np+nr_x,\ \ ny=100nq+nr_y$$

命題①は整数r_x，r_y（$0\leqq r_x\leqq 99$，$0\leqq r_y\leqq 99$）に対し,

$$r_x\neq r_y\text{ ならば，}C(nr_x)\neq C(nr_y)\cdots\cdots\cdots②$$

すると，命題②より$C(0)$，$C(n)$，$C(2n)$，$C(3n)$, …… , $C(99n)$はすべて異なり，しかも題意から 0, 1, 2, 3, ……, 99 のいずれかである。

よって，$C(nx)=1$となる 0 以上の整数xが存在する。

［解 説］

整数a, bが互いに素であるとき，$ax+by=1$を満たす整数x, yが存在するという定理がありますが, (2)はこの定理の具体的な場合の証明となっています。しかし，上の解の論法は，たとえ(1)の誘導がついたとしても，参考書などで類題を経験しておかないと無理でしょう。

5 ［2000 大阪大・理］

まず，8 以上の整数 x は，0 以上の整数 m，n を用いて，$x=3m+5n$ の形に表せることを示す。

$n=0$ のとき $x=3m$ となり，$m\geqq 0$ より x は 3 以上の 3 の倍数をすべて表すことができる。

$n=1$ のとき $x=3m+5=3(m+1)+2$ となり，$m+1\geqq 1$ より x は 3 で割った余りが 2 となる 5 以上の整数をすべて表すことができる。

$n=2$ のとき $x=3m+10=3(m+3)+1$ となり，$m+3\geqq 3$ より x は 3 で割った余りが 1 となる 10 以上の整数をすべて表すことができる。

以上より，8 以上の整数 x は，$x=3m+5n$ の形に表せる。

さて，$(m,\ n)=(1,\ 1)$ で $x=8$ となるので，8 より小さい自然数 x が $x=3m+5n$ の形に表せるのは，$(m,\ n)=(1,\ 0)$，$(2,\ 0)$，$(0,\ 1)$ の場合だけであり，順に $x=3,\ 6,\ 5$ となる。

すると，0 以上の整数 m，n を用いて，$x=3m+5n$ とは表すことができない自然数 x は 1, 2, 4, 7 だけである。

［解 説］

いきなり 8 以上の整数がすべて $3m+5n$ の形で表せることがわかったわけではありません。m，n に 0 以上の整数を具体的にあてはめて推測をしました。ただ，3 と 5 が互いに素なので，整数 m，n を用いて $3m+5n$ の形で，任意の整数が表せるということは，基本の 1 つです。

6　　[2000 金沢大・理]

(1)　${}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_r$ より，${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} = {}_n\mathrm{C}_r - {}_{n-1}\mathrm{C}_r$ となるので, $n \geqq 4$ のとき,

$$\sum_{k=3}^{n} {}_{k-1}\mathrm{C}_2 = {}_2\mathrm{C}_2 + \sum_{k=4}^{n} {}_{k-1}\mathrm{C}_2 = {}_3\mathrm{C}_3 + \sum_{k=4}^{n} ({}_k\mathrm{C}_3 - {}_{k-1}\mathrm{C}_3) = {}_n\mathrm{C}_3$$

また，$n=3$ のとき，$\displaystyle\sum_{k=3}^{3} {}_{k-1}\mathrm{C}_2 = {}_2\mathrm{C}_2 = {}_3\mathrm{C}_3$ より成り立つ。

以上より, $n \geqq 3$ で，$\displaystyle\sum_{k=3}^{n} {}_{k-1}\mathrm{C}_2 = {}_n\mathrm{C}_3$

(2)　k 個の球を 1 列に並べ, その球の間の $k-1$ か所から 2 か所選んで仕切りを入れる。左側の仕切りの左側にある球の個数を x, 2 つの仕切りの間にある球の個数を y, 右側の仕切りの右側にある球の個数を z とすると,

$x+y+z=k$ $(x \geqq 1,\ y \geqq 1,\ z \geqq 1)$ ………①

ここで, 仕切りの入れ方 1 通りに対して, ①を満たす整数の組$(x,\ y,\ z)$は 1 通り決まり, その個数は,

$${}_{k-1}\mathrm{C}_2 = \frac{1}{2}(k-1)(k-2)$$

(3)　整数 k を $0 \leqq k \leqq m$ とし，$x+y+z=k$ $(x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0)$ ……②を満たす整数の組$(x,\ y,\ z)$に対して，$a=x+1,\ b=y+1,\ c=z+1$とおくと,

$a+b+c=k+3$ $(a \geqq 1,\ b \geqq 1,\ c \geqq 1)$ ………③

③を満たす整数の組$(a,\ b,\ c)$は, (2)より ${}_{k+2}\mathrm{C}_2$ 通りとなるので, ②を満たす整数の組$(x,\ y,\ z)$の個数は ${}_{k+2}\mathrm{C}_2$ である。

すると，$x+y+z \leqq m$ $(x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0)$ を満たす整数の組$(x,\ y,\ z)$の個数は, (1)を用いて,

$$\sum_{k=0}^{m} {}_{k+2}\mathrm{C}_2 = \sum_{k=3}^{m+3} {}_{k-1}\mathrm{C}_2 = {}_{m+3}\mathrm{C}_3 = \frac{1}{6}(m+3)(m+2)(m+1)$$

［解 説］

(3)の条件を満たす四面体の内部または面上の格子点の個数を求めることが本問のねらいです。(1)と(2)がそれを導くためのうまい誘導となっています。

７ ［2000 京都大・文］

$x_{k-1}-2x_k+x_{k+1}>0$ より，$x_k-x_{k-1}<x_{k+1}-x_k$

ここで，$y_k=x_{k+1}-x_k$ とおくと，$y_{k-1}<y_k$ となり，$2\leqq k\leqq n-1$ から，

$$y_1<y_2<\cdots\cdots<y_{n-2}<y_{n-1}$$

(i)　$y_1>0$ のとき

$0<y_1<y_2<\cdots\cdots<y_{n-2}<y_{n-1}$ より，$x_1<x_2<x_3<\cdots\cdots<x_{n-2}<x_{n-1}<x_n$

x_1，…，x_n の最小値 m は x_1 である。

(ii)　$y_{n-1}\leqq 0$ のとき

$y_1<y_2<\cdots\cdots<y_{n-2}<y_{n-1}\leqq 0$ より，$x_1>x_2>x_3>\cdots\cdots>x_{n-2}>x_{n-1}\geqq x_n$

x_1，…，x_n の最小値 m は x_n，または x_n と x_{n-1} である。

(iii)　$y_1\leqq 0$ かつ $y_{n-1}>0$ のとき

$y_1<y_2<\cdots\cdots<y_i\leqq 0<y_{i+1}<\cdots\cdots<y_{n-2}<y_{n-1}$ となる i $(1\leqq i\leqq n-2)$ が存在する。

$$x_1>x_2>x_3>\cdots\cdots>x_i\geqq x_{i+1}<x_{i+2}<\cdots\cdots<x_{n-2}<x_{n-1}<x_n$$

x_1，…，x_n の最小値 m は x_{i+1}，または x_{i+1} と x_i である。

(i)～(iii)より，$x_l=m$ となる l の個数は 1 または 2 である。

［解 説］

与えられた不等式の意味は，階差数列が単調増加する漸化式というものです。この階差数列 $\{y_n\}$ の符号で，もとの数列 $\{x_n\}$ の増減の様子が把握できます。

$\boxed{8}$ ［2001 大阪大・理］

(1) (i) $n=1$ のとき $b_1=c_1=1-a_1$ より，$b_1 \geqq c_1$ は成立する。

(ii) $n=k$ のとき $b_k \geqq c_k$ と仮定すると，$b_k-c_k \geqq 0$

$b_{k+1}-c_{k+1}=(1-a_{k+1})b_k-(c_k-a_{k+1}) \geqq a_{k+1}(1-b_k)$ ………①

ここで，$a_n \geqq 0$ かつ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{2}$ より，$0 \leqq a_n \leqq \dfrac{1}{2}$ となるので，$\dfrac{1}{2} \leqq 1-a_n \leqq 1$

よって，$b_k=(1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_k) \leqq 1$ から，$a_{k+1}(1-b_k) \geqq 0$ ………②

①②より，$b_{k+1}-c_{k+1} \geqq 0$ となり，$n=k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，すべての n に対し，不等式 $b_n \geqq c_n$ が成り立つ。

(2) 条件より，ある n に対して，$b_{n+1}-c_{n+1}=(b_n-c_n)+a_{n+1}(1-b_n)=0$

ここで，②より $a_{n+1}(1-b_n) \geqq 0$ なので，$b_n-c_n \leqq 0$

ところが, (1)より $b_n-c_n \geqq 0$ なので，$b_n-c_n=0$ となる。

(3) $c_3=1-(a_1+a_2+a_3)$ で，$0 \leqq a_1+a_2+a_3 \leqq \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{2}$ より，$\dfrac{1}{2} \leqq c_3 \leqq 1$

ところが，$b_3=\dfrac{1}{2}$ のとき, (1)より $c_3 \leqq \dfrac{1}{2}$ となるので，$c_3=\dfrac{1}{2}$ である。

さて，$b_3=(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)=\dfrac{1}{2}$ ……③，$c_3=1-(a_1+a_2+a_3)=\dfrac{1}{2}$ ……④

③より，$1-(a_1+a_2+a_3)+(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1)-a_1a_2a_3=\dfrac{1}{2}$

④を代入して，$a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1=a_1a_2a_3$ ………⑤

また, (2)より $b_3=c_3=\dfrac{1}{2}$ のとき，$b_2=c_2$ なので,

$(1-a_1)(1-a_2)=1-(a_1+a_2)$，$a_1a_2=0$ ………⑥

(i) $a_1=0$ のとき ⑤より $a_2a_3=0$

$a_2=0$ のとき③より $a_3=\dfrac{1}{2}$，$a_3=0$ のとき③より $a_2=\dfrac{1}{2}$

(ii) $a_1 \neq 0$ のとき ⑥より $a_2=0$ で，⑤より $a_3a_1=0$ なので $a_3=0$

このとき, ③より $a_1=\dfrac{1}{2}$

(i)(ii)より，$(a_1,\ a_2,\ a_3)=\left(\dfrac{1}{2},\ 0,\ 0\right)$, $\left(0,\ \dfrac{1}{2},\ 0\right)$, $\left(0,\ 0,\ \dfrac{1}{2}\right)$

すると，このいずれの組も，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{2}$ から $n \geqq 4$ において $a_n=0$ となるので，求める数列 $\{a_n\}$ は全部で 3 種類存在する。

［解 説］

思考がなめらかに流れていくように，設問に工夫がいろいろ施されています。