２０２５ 入試対策

２次数学ランドマーク

複素数33題

理系 27か年

１９９８ － ２０２４

外林 康治　編著

電送数学舎

複 素 数

【問題一覧】

（注）問題番号が，対応する解答例へのハイパーリンクになっています。

1 複素平面上で $z_0 = 2(\cos\theta + i\sin\theta)$ $(0° < \theta < 90°)$，$z_1 = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{4}z_0$，$z_2 = -\dfrac{1}{z_0}$ を表す点をそれぞれ P_0，P_1，P_2 とする。

(1) z_1 を極形式で表せ。

(2) z_2 を極形式で表せ。

(3) 原点O，P_0，P_1，P_2 の 4 点が同一円周上にあるときの z_0 の値を求めよ。

［1998 岡山大］

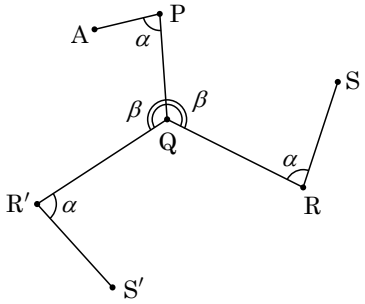
2 平面上において，7 点A，P，Q，R，S，R′，S′ を下図のようにとる。ただし，

$AP = a$，$PQ = b$

$QR = QR' = c$，$RS = R'S' = d$

$\angle APQ = \angle SRQ = \angle S'R'Q = \alpha$ $(0 \leqq \alpha \leqq \pi)$

$\angle RQP = \angle PQR' = \beta$ $(0 \leqq \beta \leqq \pi)$



である。このとき，$AS^2 - AS'^2$ を $\sin\alpha$，$\sin\beta$ および a, b, c, d を用いて表せ。 ［1998 大阪大］

3 2 つの複素数 α，β が，条件 $\alpha^2 + \beta^2 = -\alpha\beta$，$|\alpha + \beta| = 3$ を満たしているとき，次の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{\beta}{\alpha}$ の偏角 θ を求めよ。ただし，$0° \leqq \theta < 360°$ とする。

(2) α の絶対値を求めよ。

(3) 複素数平面上で，α，β，$\alpha + \beta$，$-i\alpha$，$i\beta$ の表す 5 つの点を頂点とする五角形の面積を求めよ。 ［1999 岡山大］

4 α，β は $|\alpha + \beta| < 2$ を満たす複素数とする。このとき関数

$$f(x) = \frac{1}{4}|\alpha + \beta|^2 x^2 - \left(|\alpha| + |\beta|\right)x + 1$$

の $0 \leqq x \leqq 1$ における最小値を求めよ。 ［2000 東北大］

5 複素数 $z = \cos 20° + i\sin 20°$ と，それに共役な複素数 $\bar{z}$ に対し，$\alpha = z + \bar{z}$ とする。

(1) α は整数を係数とするある 3 次方程式の解となることを示せ。

(2) この 3 次方程式は 3 個の実数解をもち，そのいずれも有理数ではないことを示せ。

(3) 有理数を係数とする 2 次方程式で，α を解とするものは存在しないことを背理法を用いて示せ。 ［2000 九州大］

6 原点をOとする複素数平面上で, 0でない複素数z, wの表す点をそれぞれ$\mathrm{P}(z)$, $\mathrm{Q}(w)$とする。zに対してwを, Oを始点とする半直線$\mathrm{OP}(z)$上に$\mathrm{Q}(w)$があり, $|w|=\dfrac{2}{|z|}$を満たすようにとる。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) $w=\dfrac{2}{\overline{z}}$を示せ。

(2) ± 2, $\pm 2i$の表す4点を頂点とする正方形の周上を点$\mathrm{P}(z)$が動く。このとき, $\mathrm{Q}(w)=\mathrm{P}(z)$となる$z$を求めよ。

(3) $\mathrm{P}(z)$が(2)の正方形の周上を動くとき, 点$\mathrm{Q}(w)$の描く図形を求めて図示せよ。

［2000 岡山大］

7 複素数平面上の点zを考える。

(1) 実数a, cと複素数bが$|b|^2-ac>0$を満たすとき, $az\overline{z}+\overline{b}z+b\overline{z}+c=0$を満たす点$z$は$a\neq 0$のとき, どのような図形を描くか。ただし, $\overline{z}$はzに共役な複素数を表す。

(2) 0でない複素数dに対して, $dz(\overline{z}+1)=\overline{d}\,\overline{z}(z+1)$を満たす点$z$はどのような図形を描くか。

［2001 九州大］

8 複素数平面上の点a_1, a_2, $\cdots$, a_n, $\cdots$を

$$a_1=1,\ a_2=i,\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

により定め, $b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$とおく。ただし, iは虚数単位である。

(1) 3点b_1, b_2, b_3を通る円Cの中心と半径を求めよ。

(2) すべての点$b_n\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$は円Cの周上にあることを示せ。 ［2001 東京大］

9 次の問いに答えよ。ただし, 偏角θは, $0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$の範囲で考えるものとする。

(1) $|z+i|=|z-i|$を満たす複素数zは, 実数に限ることを示せ。

(2) 複素数平面上でzが実軸上を動くとき, 複素数$z+i$の偏角$\arg(z+i)$の動く範囲を求めよ。

(3) zを未知数とする方程式$(z+i)^9=(z-i)^9$のすべての解zについて$z+i$の偏角$\arg(z+i)$を求めよ。

［2002 名古屋大］

10 a を実数とし，z を複素数とする。複素数平面上で，a，z，z^2，z^3 が表す 4 点が，あるひし形の 4 頂点になるとする。ただし，a と z^2 が表す頂点は対角線上にあるとする。このような a と z の値をすべて求めよ。 [2003 千葉大]

11 次の問いに答えよ。ただし，i は虚数単位とする。

(1) 複素数 z に対し，$w=\dfrac{z-i}{z+i}$ とする。z が実軸上を動くとき，複素数平面上で w を表す点が描く図形を求めよ。

(2) 複素数 z とその共役複素数 $\overline{z}$ に対し，$w_1=\dfrac{z-i}{z+i}$，$w_2=\dfrac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i}$ とする。$z\neq\pm i$ のとき，複素数平面上で w_1 を表す点を P，w_2 を表す点を Q とする。P, Q と原点 O が同一直線上にあることを示せ。 [2003 神戸大]

12 O を原点とする複素数平面上で 6 を表す点を A，$7+7i$ を表す点を B とする。ただし，i は虚数単位である。正の実数 t に対し，$\dfrac{14(t-3)}{(1-i)t-7}$ を表す点 P をとる。

(1) $\angle$APB を求めよ。

(2) 線分 OP の長さが最大になる t を求めよ。 [2003 東京大]

13 複素数 α，β は $|\alpha-1|=1$，$|\beta-i|=1$ を満たす。

(1) $\alpha+\beta$ が存在する範囲を複素数平面上に図示せよ。

(2) $(\alpha-1)(\beta-1)$ が存在する範囲を複素数平面上に図示せよ。 [2003 一橋大]

14 複素数平面上に異なる 3 点 z，z^2，z^3 がある。

(1) z，z^2，z^3 が同一直線上にあるような z をすべて求めよ。

(2) z，z^2，z^3 が二等辺三角形の頂点になるような z の全体を複素数平面上に図示せよ。また，z，z^2，z^3 が正三角形の頂点になるような z をすべて求めよ。

[2004 一橋大]

15 α は絶対値 1 の複素数とし，複素数 z に対して，$w=\dfrac{\overline{\alpha}z-2}{2z-\alpha}$ とおく。ただし $\overline{\alpha}$ は α の共役複素数を表す。

(1) 複素数平面上で，z が原点と点 α を通る直線上$\left(\text{ただし，点}\dfrac{\alpha}{2}\text{を除く}\right)$を動くとき，$w$ の表す点は原点と点 $\overline{\alpha}$ を通る直線上にあることを示せ。

(2) 複素数平面上で，z が不等式 $|z|>1$ を満たすとき，複素数 w を表す点はどのような図形上を動くか。 ［2005 千葉大］

16 t を実数とするとき，2 次方程式 $z^2+tz+t=0$ について，次の問いに答えよ。

(1) この 2 次方程式が異なる 2 つの虚数解をもつような t の範囲と，そのときの虚数解をすべて求めよ。

(2) (1)の虚数解のうち，その虚部が正のものを $z(t)$ で表す。t が(1)で求めた範囲を動くとき，複素数平面上で点 $z(t)$ が描く図形 C を求め，図示せよ。

(3) 複素数平面上で，点 z が(2)の図形 C 上を動くとき，$w=\dfrac{iz}{z+1}$ で表される点 w が描く図形を求め，図示せよ。 ［2005 九州大］

17 α を実数でない複素数とし，β を正の実数とする。以下の問いに答えよ。ただし，複素数 w に対してその共役複素数を $\overline{w}$ で表す。

(1) 複素数平面上で，関係式 $\alpha\overline{z}+\overline{\alpha}z=|z|^2$ を満たす複素数 z の描く図形を C とする。このとき，C は原点を通る円であることを示せ。

(2) 複素数平面上で，$(z-\alpha)(\beta-\overline{\alpha})$ が純虚数となる複素数 z の描く図形を L とする。L は(1)で定めた C と 2 つの共有点をもつことを示せ。また，その 2 点を P，Q とするとき，線分 PQ の長さを α と $\overline{\alpha}$ を用いて表せ。

(3) β の表す複素数平面上の点を R とする。(2)で定めた点 P，Q と点 R を頂点とする三角形が正三角形であるとき，β を α と $\overline{\alpha}$ を用いて表せ。 ［2015 筑波大］

18 多項式$P(x)$を，$P(x)=\dfrac{(x+i)^7-(x-i)^7}{2i}$により定める。ただし，$i$ は虚数単位とする。以下の問いに答えよ。

(1) $P(x)=a_0x^7+a_1x^6+a_2x^5+a_3x^4+a_4x^3+a_5x^2+a_6x+a_7$ とするとき，係数 a_0，…，a_7 をすべて求めよ。

(2) $0<\theta<\pi$ に対して，$P\left(\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)=\dfrac{\sin 7\theta}{\sin^7\theta}$ が成り立つことを示せ。

(3) (1)で求めた a_1，a_3，a_5，a_7 を用いて，多項式$Q(x)=a_1x^3+a_3x^2+a_5x+a_7$ を考える。$\theta=\dfrac{\pi}{7}$ として，$k=1,\ 2,\ 3$ について，$x_k=\dfrac{\cos^2 k\theta}{\sin^2 k\theta}$ とおく。このとき，$Q(x_k)=0$ が成り立つことを示し，$x_1+x_2+x_3$ の値を求めよ。 ［2016 東北大］

19 z を複素数とする。複素数平面上の 3 点 $\mathrm{A}(1)$，$\mathrm{B}(z)$，$\mathrm{C}(z^2)$ が鋭角三角形をなすような z の範囲を求め，図示せよ。 ［2016 東京大］

20 α，β，γ を複素数とし，$z\overline{z}+\alpha z+\beta\overline{z}+\gamma=0$……(＊)を満たす複素数 z を考える。以下の問いに答えよ。

(1) z は，$(\alpha-\overline{\beta})z-(\overline{\alpha}-\beta)\overline{z}+\gamma-\overline{\gamma}=0$ を満たすことを示せ。

(2) $|\alpha|=|\beta|\neq 0$ を仮定し，また γ は負の実数であると仮定する。このとき，(＊)を満たす z がちょうど 2 個あるための必要十分条件を α，β を用いて表せ。

［2017 東北大］

21 w を 0 でない複素数，x, y を $w+\dfrac{1}{w}=x+yi$ を満たす実数とする。

(1) 実数 R は $R>1$ を満たす定数とする。w が絶対値 R の複素数全体を動くとき，xy 平面上の点$(x,\ y)$の軌跡を求めよ。

(2) 実数 α は $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とする。w が偏角 α の複素数全体を動くとき，xy 平面上の点$(x,\ y)$の軌跡を求めよ。 ［2017 京都大］

22 複素数平面上の原点以外の点 z に対して，$w=\dfrac{1}{z}$ とする。

(1) α を 0 でない複素数とし，点 α と原点 O を結ぶ線分の垂直二等分線を L とする。点 z が直線 L 上を動くとき，点 w の軌跡は円から 1 点を除いたものになる。この円の中心と半径を求めよ。

(2) 1 の 3 乗根のうち，虚部が正であるものを β とする。点 β と点 β^2 を結ぶ線分上を点 z が動くときの点 w の軌跡を求め，複素数平面上に図示せよ。 ［2017 東京大］

23 複素数平面上に 3 点 O, A, B を頂点とする△OAB がある。ただし，O は原点とする。△OAB の外心を P とする。3 点 A, B, P が表す複素数を，それぞれ α，β，z とするとき，$\alpha\beta = z$ が成り立つとする。

(1) 複素数 α の満たすべき条件を求め，点 $\mathrm{A}(\alpha)$ が描く図形を複素数平面上に図示せよ。

(2) 点 $\mathrm{P}(z)$ の存在範囲を求め，複素数平面上に図示せよ。 [2017 北海道大]

24 α を複素数とする。等式 $\alpha(|z|^2+2)+i(2|\alpha|^2+1)\overline{z}=0$ を満たす複素数 z をすべて求めよ。ただし，i は虚数単位である。 [2018 九州大]

25 複素数平面上で $|z+i|-|z-i|=1$ を満たす点 z の全体を H とおく。以下の問いに答えよ。ただし，複素数の偏角 θ の範囲は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

(1) H の点 z に対して，z の偏角 θ_1 のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) H の点 z に対して $w=\dfrac{1}{z}$ とする。w の絶対値 r_2 と偏角 θ_2 のとりうる値の範囲をそれぞれ求めよ。 [2018 熊本大]

26 複素数 α に対して，複素数平面上の 3 点 $\mathrm{O}(0)$，$\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\alpha^2)$ を考える。次の条件(Ⅰ), (Ⅱ), (Ⅲ)をすべて満たす複素数 α 全体の集合を S とする。

(Ⅰ) α は実数でも純虚数でもない。

(Ⅱ) $|\alpha|>1$ である。

(Ⅲ) 三角形 OAB は直角三角形である。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1) α が S に属するとき，$\angle\mathrm{OAB}=\dfrac{\pi}{2}$ であることを示せ。

(2) 集合 S を複素数平面上に図示せよ。

(3) x, y を $\alpha^2=x+yi$ を満たす実数とする。α が S を動くとき，xy 平面上の点 $(x,\ y)$ の軌跡を求め，図示せよ。 [2018 筑波大]

27 $|z|^2+3=2(z+\overline{z})$ を満たす複素数 z 全体の集合を A とする。ただし $\overline{z}$ は z の共役複素数である。

(1) 集合 A を複素数平面上に図示せよ。

(2) A の要素 z の偏角を θ とする。ただし $-\pi < \theta \leqq \pi$ とする。z が A を動くとき，θ のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) z^{60} が正の実数となる A の要素 z の個数を求めよ。 [2019 筑波大]

28 i は虚数単位とする。複素数平面において，複素数 z の表す点 P を $\mathrm{P}(z)$ または点 z とかく。$\omega=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ とおき，3 点 $\mathrm{A}(1)$，$\mathrm{B}(\omega)$，$\mathrm{C}(\omega^2)$ を頂点とする△ABC を考える。

(1) △ABC は正三角形であることを示せ。

(2) 点 z が辺 AC 上を動くとき，点 $-z$ が描く図形を複素数平面上に図示せよ。

(3) 点 z が辺 AB 上を動くとき，点 z^2 が描く図形を E_1 とする。また，点 z が辺 AC 上を動くとき，点 z^2 が描く図形を E_2 とする。E_1 と E_2 の共有点をすべて求めよ。

［2021 筑波大］

29 a, b を実数とし，$f(z)=z^2+az+b$ とする。a, b が，$|a|\leqq 1$，$|b|\leqq 1$ を満たしながら動くとき，$f(z)=0$ を満たす複素数 z がとりうる値の範囲を複素数平面上に図示せよ。

［2022 東京工業大］

30 以下の問いに答えよ。

(1) 4 次方程式 $x^4-2x^3+3x^2-2x+1=0$ を解け。

(2) 複素数平面上の△ABC の頂点を表す複素数をそれぞれ α，β，γ とする。
$(\alpha-\beta)^4+(\beta-\gamma)^4+(\gamma-\alpha)^4=0$ が成り立つとき，△ABC はどのような三角形になるか答えよ。

［2023 九州大］

31 整数の組 $(a,\ b)$ に対して 2 次式 $f(x)=x^2+ax+b$ を考える。方程式 $f(x)=0$ の複素数の範囲のすべての解 α に対して $\alpha^n=1$ となる正の整数 n が存在するような組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。

［2024 東京工業大］

32 c を 1 より大きい実数とする。また，i を虚数単位として，$\alpha=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$ とおく。複素数 z に対して，

$$P(z)=z^3-3z^2+(c+2)z-c,\quad Q(z)=-\alpha^7z^3+3\alpha^6z^2+(c+2)\alpha z-c$$

と定める。

(1) 方程式 $P(z)=0$ を満たす複素数 z をすべて求め，それらを複素数平面上に図示せよ。

(2) 方程式 $Q(z)=0$ を満たす複素数 z のうち実部が最大のものを求めよ。

(3) 複素数 z についての 2 つの方程式 $P(z)=0$，$Q(z)=0$ が共通解 β をもつとする。そのときの c の値と β を求めよ。

［2024 名古屋大］

33 定数 α は実数でない複素数とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{\alpha-|\alpha|}{\alpha+|\alpha|}$ は純虚数であることを示せ。

(2) 純虚数 β で，$\dfrac{\beta-|\alpha|}{\alpha+|\alpha|}$ が純虚数となるものがただ１つ存在することを示せ。

(3) 複素数 z を $\dfrac{z-|\alpha|}{\alpha+|\alpha|}$ が純虚数となるように動かすとき，$|z|$ が最小となる z を α を用いて表せ。

［2024 筑波大］

複 素 数

【解答例と解説】

（注）問題番号が，対応する問題ページへのハイパーリンクになっています。

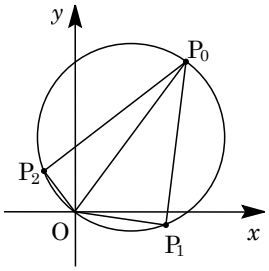
1 ［1998 岡山大］

(1) $z_1 = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{4} z_0 = \dfrac{1}{2}\{\cos(-60°) + i\sin(-60°)\}\cdot 2(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= \cos(\theta - 60°) + i\sin(\theta - 60°)$

(2) $z_2 = -\dfrac{1}{z_0} = \dfrac{\cos 180° + i\sin 180°}{2(\cos\theta + i\sin\theta)} = \dfrac{1}{2}\{\cos(180°-\theta) + i\sin(180°-\theta)\}$

(3) $0° < \theta < 90°$ より，$\theta - 60° < \theta < 180° - \theta$



$\angle P_0OP_1 = \theta - (\theta - 60°) = 60°$ で，$OP_0 = 2$，$OP_1 = 1$ から，

$\angle OP_1P_0 = 90°$

よって，OP_0 は円の直径となり，$\angle OP_2P_0 = 90°$

ここで，$\angle P_0OP_2 = (180°-\theta) - \theta = 180° - 2\theta$ で，$OP_0 = 2$，

$OP_2 = \dfrac{1}{2}$ から，

$\cos(180°-2\theta) = \dfrac{OP_2}{OP_0} = \dfrac{1}{4}$

よって，$\cos 2\theta = -\dfrac{1}{4}$，$2\cos^2\theta - 1 = -\dfrac{1}{4}$，$\cos\theta = \sqrt{\dfrac{3}{8}} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$

$\sin\theta = \sqrt{1 - \dfrac{3}{8}} = \dfrac{\sqrt{10}}{4}$

以上より，$z_0 = 2\left(\dfrac{\sqrt{6}}{4} + \dfrac{\sqrt{10}}{4}i\right) = \dfrac{\sqrt{6}}{2} + \dfrac{\sqrt{10}}{2}i$

［解 説］

(3)では，最初は一般的に 4 点が同一円周上にある条件から求めようと思ったのですが，たいへんな計算が待ち構えていました。そこで，これは何か特別な事情があると推測したところ，やはりその通りでした。この発見がポイントです。

2 ［1998 大阪大］

Q を原点とし, QP を実軸の正の部分とする複素数平面を設定する。

また，$z=\cos\alpha+i\sin\alpha$，$w=\cos\beta+i\sin\beta$ とおく。

すると，点 P を表す複素数は b となり，点 A を表す複素数は,

$$b+(0-b)\cdot\frac{a}{b}\{\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)\}=b-a\overline{z}$$

点 R，R′ を表す複素数は，それぞれ $c\overline{w}$，cw となる。

点 S を表す複素数は,

$$c\overline{w}+(0-c\overline{w})\cdot\frac{d}{c}\{\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)\}=c\overline{w}-d\overline{w}\overline{z}=\overline{w}(c-d\overline{z})$$

点 S′ を表す複素数は,

$$cw+(0-cw)\cdot\frac{d}{c}\{\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)\}=cw-dw\overline{z}=w(c-d\overline{z})$$

ここで $b-a\overline{z}=u$，$c-d\overline{z}=v$ とおくと，A(u)，S$(\overline{w}v)$，S′(wv) となる。

$$\begin{aligned}\mathrm{AS}^2-\mathrm{AS}'^2&=|\overline{w}v-u|^2-|wv-u|^2\\&=(\overline{w}v-u)(w\overline{v}-\overline{u})-(wv-u)(\overline{w}\overline{v}-\overline{u})\\&=-\overline{w}\overline{u}v-wu\overline{v}+w\overline{u}v+\overline{w}u\overline{v}=(\overline{u}v-u\overline{v})(w-\overline{w})\end{aligned}$$

そこで，
$$\begin{aligned}\overline{u}v-u\overline{v}&=(b-az)(c-d\overline{z})-(b-a\overline{z})(c-dz)\\&=-bd\overline{z}-acz+bdz+ac\overline{z}\\&=(bd-ac)(z-\overline{z})=(bd-ac)\cdot 2i\sin\alpha\end{aligned}$$

また，$w-\overline{w}=2i\sin\beta$ より,

$$\mathrm{AS}^2-\mathrm{AS}'^2=(bd-ac)(4i^2)\sin\alpha\sin\beta=4(ac-bd)\sin\alpha\sin\beta$$

［解 説］

いろいろな方針が考えられますが，上の解では複素数平面を利用してみました。それさえ決まれば，計算を簡略化するための置き換えを適当に行っていくと，結論を導くことはさほど困難ではありません。

3　　［1999 岡山大］

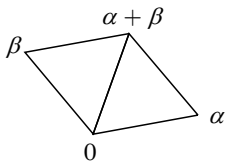
(1)　$\alpha^2+\beta^2=-\alpha\beta$ で $\alpha\neq 0$ より，$1+\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}=-\dfrac{\beta}{\alpha}$，$\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2+\dfrac{\beta}{\alpha}+1=0$

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}=\cos(\pm 120^\circ)+i\sin(\pm 120^\circ)$$

$\dfrac{\beta}{\alpha}$ の偏角 θ は $0^\circ\leqq\theta<360^\circ$ より，$\theta=120^\circ$，240°

(2)　$\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right|=1$ より，$\dfrac{|\beta|}{|\alpha|}=1$，$|\alpha|=|\beta|$

すると，4 点 0，α，$\alpha+\beta$，β を結ぶ四角形はひし形となり，しかも(1)より，3 点 0，α，$\alpha+\beta$ を結ぶ三角形は正三角形となる。



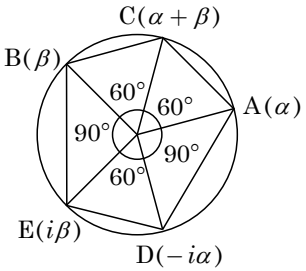
条件より $|\alpha+\beta|=3$ なので，$|\alpha|=|\beta|=3$

(3)　点 $-i\alpha$ は点 α を原点まわりに -90° 回転した点，点 $i\beta$ は点 β を原点まわりに 90° 回転した点である。

(i)　$\theta=120^\circ$ のとき

5 点 α，β，$\alpha+\beta$，$-i\alpha$，$i\beta$ は右図のような位置関係にあり，$\angle\mathrm{BOE}=\angle\mathrm{AOD}=90^\circ$，$\angle\mathrm{EOD}=60^\circ$ より，五角形 ACBED の面積は，

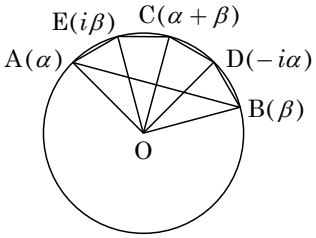
$$\left(\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\cdot\sin 60^\circ\right)\times 3+\left(\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\right)\times 2=9+\frac{27}{4}\sqrt{3}$$



(ii)　$\theta=240^\circ$ のとき

5 点 α，β，$\alpha+\beta$，$-i\alpha$，$i\beta$ は右図のような位置関係にあり，$\angle\mathrm{AOE}=\angle\mathrm{COE}=\angle\mathrm{COD}=\angle\mathrm{BOD}=30^\circ$ より，五角形 ABDCE の面積は，

$$\left(\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\cdot\sin 30^\circ\right)\times 4-\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\cdot\sin 120^\circ=9-\frac{9}{4}\sqrt{3}$$



［解 説］

複素数と図形に関する頻出問題です。(3)において，位置関係の異なる 2 つの五角形を考えるのがポイントです。