２０２５ 入試対策

２次数学ランドマーク

極限２４題

理系 27か年

１９９８ － ２０２４

外林 康治　編著

電送数学舎

極　　限

【問題一覧】

（注）問題番号が，対応する解答例へのハイパーリンクになっています。

1 n を正の整数とする。連立不等式

$$x+y+z \leqq n,\ -x+y-z \leqq n,\ x-y-z \leqq n,\ -x-y+z \leqq n$$

をみたす xyz 空間の点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ で, $x,\ y,\ z$ がすべて整数であるものの個数を $f(n)$ とおく。極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n^3}$ を求めよ。 [1998 東京大]

2 関数 $f(x)=1-x^2$ について, 次の問いに答えよ。

(1) $f(a)=a$ を満たす正の実数 a を求めよ。

(2) a を(1)で求めた実数とする。$x \geqq \dfrac{1}{2}$ ならば, $|f(x)-f(a)| \geqq \dfrac{\sqrt{5}}{2}|x-a|$ となることを示せ。

(3) a を(1)で求めた実数とする。$\dfrac{1}{2} \leqq x_1 \leqq 1$ として,

$$x_{n+1}=f(x_n)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で決まる数列 $\{x_n\}$ を考える。すべての n に対して $\dfrac{1}{2} \leqq x_n \leqq 1$ が成り立つならば, $x_1=a$ であることを示せ。 [1999 九州大]

3 数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を S_n と表す。この数列が $a_1=1$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=1$, $n(n-2)a_{n+1}=S_n$ $(n \geqq 1)$ を満たすとき, 一般項 a_n を求めよ。

[2002 京都大]

4 関数 $f(x)=4x-x^2$ に対し, 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=c,\ a_{n+1}=\sqrt{f(a_n)}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で与える。ただし, c は $0<c<2$ を満たす定数である。

(1) $a_n<2$, $a_n<a_{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を示せ。

(2) $2-a_{n+1}<\dfrac{2-c}{2}(2-a_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。 [2003 東北大]

5 座標平面上で，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。格子点を頂点とし，辺の長さが 1 である正方形（周は含まない）を単位正方形と呼ぶことにする。p, n を自然数とし，領域 $D_n = \{(x,\ y) \mid 0 \leqq x,\ x^p \leqq y \leqq n\}$ を考え，その面積を S_n とする。L_n と M_n を，それぞれ D_n に含まれる格子点の個数および単位正方形の個数とする。

(1) グラフ $y = x^p$ $\left(0 \leqq x \leqq n^{\frac{1}{p}}\right)$ と交わる単位正方形の個数は n であることを示せ。

(2) 不等式 $M_n < S_n < M_n + n$ を示せ。また，面積 S_n を求めよ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{p+1}{p}} L_n$ を求めよ。 ［2003 九州大］

6 曲線 $C : y = e^x$ 上の異なる 2 点 $\mathrm{A}(a,\ e^a)$，$\mathrm{P}(t,\ e^t)$ における C のそれぞれの法線の交点を Q として，線分 AQ の長さを $L_a(t)$ で表す。さらに，$r(a) = \displaystyle\lim_{t\to a} L_a(t)$ と定義する。

(1) $r(a)$ を求めよ。

(2) a が実数全体を動くとき，$r(a)$ の最小値を求めよ。 ［2005 筑波大］

7 $a_1 = \dfrac{1}{2}$ とし，数列 $\{a_n\}$ を漸化式 $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{(1 + a_n)^2}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定める。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 各 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し $b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおく。$n > 1$ のとき，$b_n > 2n$ となることを示せ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} na_n$ を求めよ。 ［2006 東京大］

8 n を 2 以上の自然数とする。平面上の$\triangle OA_1A_2$は$\angle OA_2A_1 = 90°$，$OA_1 = 1$，$A_1A_2 = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$を満たすとする。$A_2$から$OA_1$へ垂線を下ろし，交点を$A_3$とする。$A_3$から$OA_2$へ垂線を下ろし，交点を$A_4$とする。以下同様に，$k = 4,\ 5,\ \cdots$について，$A_k$から$OA_{k-1}$へ垂線を下ろし，交点を$A_{k+1}$として，順番に$A_5$，$A_6$，$\cdots$を定める。$\overrightarrow{h_k} = \overrightarrow{A_kA_{k+1}}$とおくとき，以下の問いに答えよ。

(1) $k = 1,\ 2,\ \cdots$のとき，ベクトル$\overrightarrow{h_k}$と$\overrightarrow{h_{k+1}}$の内積$\overrightarrow{h_k}\cdot\overrightarrow{h_{k+1}}$を$n$と$k$で表せ。

(2) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{h_k}\cdot\overrightarrow{h_{k+1}}$とおくとき，極限値$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$を求めよ。ここで，自然対数の底 e について，$e = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$であることを用いてもよい。 ［2008 東北大］

9 実数xに対し，x以上の最小の整数を$f(x)$とする。a，bを正の実数とするとき，極限$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^c\left(\frac{1}{f(ax-7)} - \frac{1}{f(bx+3)}\right)$が収束するような実数 c の最大値と，そのときの極限値を求めよ。 ［2008 東京工業大］

10 正の実数 r と$-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$の範囲の実数$\theta$に対して，$a_0 = r\cos\theta$，$b_0 = r$とおく。$a_n$，$b_n$ ($n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)を漸化式

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2},\quad b_n = \sqrt{a_n b_{n-1}}$$

により定める。以下の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{a_1}{b_1}$，$\dfrac{a_2}{b_2}$をθで表せ。

(2) $\dfrac{a_n}{b_n}$をnとθで表せ。

(3) $\theta \neq 0$のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{r\sin\theta}{\theta}$を示せ。 ［2010 北海道大］

11 aが正の実数のとき$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}}$を求めよ。 ［2012 京都大］

12 数列$\{a_n\}$を，$a_1=1$，$a_{n+1}=\sqrt{\dfrac{3a_n+4}{2a_n+3}}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$で定める。以下の問いに答えよ。

(1) $n\geqq 2$ のとき，$a_n>1$ となることを示せ。

(2) $\alpha^2=\dfrac{3\alpha+4}{2\alpha+3}$ を満たす正の実数αを求めよ。

(3) すべての自然数nに対して$a_n<\alpha$となることを示せ。

(4) $0<r<1$ を満たすある実数 r に対して，不等式$\dfrac{\alpha-a_{n+1}}{\alpha-a_n}\leqq r$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$が成り立つことを示せ。さらに，極限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$を求めよ。 ［2012 東北大］

13 正の整数 n に対し，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲において$\sin 4nx\geqq\sin x$を満たす x の区間の長さの総和をS_nとする。このとき，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$を求めよ。 ［2013 東京工業大］

14 数列$\{a_n\}$を，$a_1=5$，$a_{n+1}=\dfrac{4a_n-9}{a_n-2}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$で定める。また，数列$\{b_n\}$を，$b_n=\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$と定める。

(1) 数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(2) すべてのnに対して，不等式 $b_n\leqq 3+\dfrac{4}{n+1}$が成り立つことを示せ。

(3) 極限値$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$を求めよ。 ［2015 東京工業大］

15 xy 平面において，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。また，実数 a に対して，a 以下の最大の整数を$[\,a\,]$で表す。記号$[\ \ ]$をガウス記号という。以下の問いではNを自然数とする。

(1) n を$0\leqq n\leqq N$を満たす整数とする。点$(n,\ 0)$と点$\left(n,\ N\sin\left(\dfrac{\pi n}{2N}\right)\right)$を結ぶ線分上にある格子点の個数をガウス記号を用いて表せ。

(2) 直線$y=x$と，x 軸，および直線$x=N$で囲まれた領域（境界を含む）にある格子点の個数を$A(N)$とおく。このとき$A(N)$を求めよ。

(3) 曲線$y=N\sin\left(\dfrac{\pi x}{2N}\right)$ $(0\leqq x\leqq N)$と，x 軸，および直線$x=N$で囲まれた領域（境界を含む）にある格子点の個数を$B(N)$とおく。(2)の$A(N)$に対して$\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{B(N)}{A(N)}$を求めよ。 ［2017 筑波大］

$\boxed{16}$ k を 2 以上の整数とする。また，$f(x)=\dfrac{1}{k}\left((k-1)x+\dfrac{1}{x^{k-1}}\right)$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $x>0$ において，関数 $y=f(x)$ の増減と漸近線を調べてグラフの概形をかけ。

(2) 数列 $\{x_n\}$ が $x_1>1$，$x_{n+1}=f(x_n)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を満たすとき，$x_n>1$ を示せ。

(3) (2)の数列 $\{x_n\}$ に対し，$x_{n+1}-1<\dfrac{k-1}{k}(x_n-1)$ を示せ。また $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n$ を求めよ。

[2018 神戸大]

$\boxed{17}$ a を実数とし，数列 $\{x_n\}$ を次の漸化式によって定める。

$$x_1=a\,,\quad x_{n+1}=x_n+{x_n}^2\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) $a>0$ のとき，数列 $\{x_n\}$ が発散することを示せ。

(2) $-1<a<0$ のとき，すべての正の整数 n に対して $-1<x_n<0$ が成り立つことを示せ。

(3) $-1<a<0$ のとき，数列 $\{x_n\}$ の極限を調べよ。 [2019 東北大]

$\boxed{18}$ 数列 $\{a_n\}$ を $a_n=\dfrac{1}{2^n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定める。以下の問いに答えよ。

(1) $t>0$ のとき，$1\leqq\dfrac{e^t-1}{t}\leqq e^t$ であることを示せ。

(2) 数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$ を

$$x_n=\log(e^{a_n}+1)\,,\quad y_n=\log(e^{a_n}-1)\,,\quad z_n=y_n+\sum_{k=1}^{n}x_k\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。z_n は n によらない定数であることを示せ。

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\log\left(\frac{e^{a_k}+1}{2}\right)$ を求めよ。 [2019 筑波大]

$\boxed{19}$ p を正の整数とする。α，β は x に関する方程式 $x^2-2px-1=0$ の 2 つの解で，$|\alpha|>1$ であるとする。

(1) すべての正の整数 n に対し，$\alpha^n+\beta^n$ は整数であり，さらに偶数であることを証明せよ。

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-\alpha)^n\sin(\alpha^n\pi)$ を求めよ。 [2020 京都大]

20 $0<r<1$ とし，半径 1 の円 C_1 と半径 r の円 C_2 の中心は一致しているとする。円 C_1 に内接し，円 C_2 に外接する円をできるだけたくさん描く。ただし，どの 2 つの円も共有点の個数は 1 以下とする。描いた円の円周の長さの総和を $f(r)$ とするとき，$\lim_{r\to 1-0} f(r)$ を求めよ。 [2020 信州大]

21 $a \geqq 0$ とし，n を正の整数とする。次の問いに答えよ。

(1) $x>0$ のとき，$\dfrac{x}{1+a}\left(1-\dfrac{x}{2(1+a)}\right)<\log\dfrac{1+a+x}{1+a}<\dfrac{x}{1+a}$ を示せ。

(2) $I_n(a)=\left(1+\dfrac{1}{n^2(1+a)}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2(1+a)}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n^2(1+a)}\right)$ とおく。
$\lim_{n\to\infty}\log I_n(a)$ を求めよ。

(3) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{{}_{3n^2+n}\mathrm{C}_n}{{}_{2n^2+n}\mathrm{C}_n}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ を求めよ。 [2021 新潟大]

22 次の問いに答えよ。

(1) $\sqrt{2}^{\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)}$ と $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ との大小を比較せよ。

(2) 関数 $f(x)$ を $f(x)=\sqrt{2}^{\,x}$ と定義し，座標平面上の曲線 $y=f(x)$ を C とする。C 上の点 $(2,\ f(2))$ における接線の方程式を，実数 m，k を用いて $y=mx+k$ と表すとき，m と k の値をそれぞれ求めよ。

(3) $f(x)$ および m と k を(2)のように定める。すべての実数 x に対して $f(x)\geqq mx+k$ が成り立つことを示せ。

(4) 数列 $\{a_n\}$ を $a_1=\sqrt{2}$ および漸化式 $a_{n+1}=\sqrt{2}^{\,a_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ により定義する。自然数 n に対して，$2-a_{n+1}\leqq(\log 2)\cdot(2-a_n)$ が成り立つことを示し，極限値 $\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。必要ならば，自然対数の底が $e=2.718\cdots$ であることを用いてよい。 [2022 広島大]

23 α を実数とする。数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1=\alpha,\quad a_{n+1}=|a_n-1|+a_n-1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定められるとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\alpha\leqq 1$ のとき，数列 $\{a_n\}$ の収束，発散を調べよ。

(2) $\alpha>2$ のとき，数列 $\{a_n\}$ の収束，発散を調べよ。

(3) $1<\alpha<\dfrac{3}{2}$ のとき，数列 $\{a_n\}$ の収束，発散を調べよ。

(4) $\dfrac{3}{2}\leqq\alpha<2$ のとき，数列 $\{a_n\}$ の収束，発散を調べよ。 [2023 九州大]

$\boxed{24}$　n を 2 以上の自然数とする。

(1)　$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{2}x^n \leqq (-1)^n\left\{\frac{1}{x+1} - 1 - \sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1}\right\} \leqq x^n - \frac{1}{2}x^{n+1}$$

(2)　$a_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ とするとき，次の極限値を求めよ。$\lim_{n\to\infty}(-1)^n n(a_n - \log 2)$

［2023 大阪大］

極　限

【解答例と解説】

（注）問題番号が，対応する問題ページへのハイパーリンクになっています。

1 [1998 東京大]

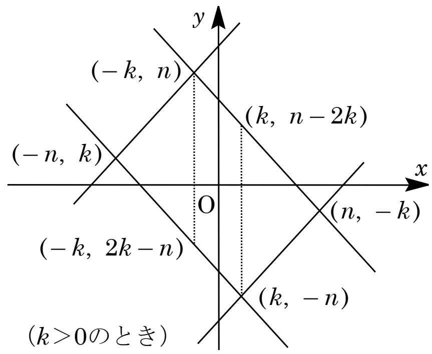
$z=k$ での切り口を考える。

$x+y+k \leqq n$ より，$y \leqq -x+n-k$

$-x+y-k \leqq n$ より，$y \leqq x+n+k$

$x-y-k \leqq n$ より，$y \geqq x-(n+k)$

$-x-y+k \leqq n$ より，$y \geqq -x-(n-k)$



切り口の存在する条件は,

$n-k \geqq -(n-k)$ かつ $n+k \geqq -(n+k)$

よって，$-n \leqq k \leqq n$

境界線の交点は,

$y=-x+n-k$ かつ $y=x+n+k$ より，$(x,\ y)=(-k,\ n)$

$y=-x+n-k$ かつ $y=x-(n+k)$ より，$(x,\ y)=(n,\ -k)$

$y=-x-(n-k)$ かつ $y=x+n+k$ より，$(x,\ y)=(-n,\ k)$

$y=-x-(n-k)$ かつ $y=x-(n+k)$ より，$(x,\ y)=(k,\ -n)$

$z=k$ 上での格子点の個数を $f_k(n)$ とすると,

$$
\begin{aligned}
f_k(n) &= 2\left\{1+3+5+\cdots\cdots+(2n-2k+1)\right\}+(2n-2k+1)(2k-1)\\
&= 2\cdot\frac{1+(2n-2k+1)}{2}\cdot(n-k+1)+(2n-2k+1)(2k-1)\\
&= 2(n-k+1)^2+\left\{2(n-k+1)-1\right\}(2k-1)
\end{aligned}
$$

以上より，$f(n)=\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} f_k(n)=\sum_{k=-n}^{n}\left[\,2(n-k+1)^2+\left\{2(n-k+1)-1\right\}(2k-1)\,\right]$

ここで，$n-k+1=l$ とおくと,

$$
\begin{aligned}
f(n) &= \sum_{l=1}^{2n+1}\left\{2l^2+(2l-1)(2n+1-2l)\right\}=\sum_{l=1}^{2n+1}\left\{-2l^2+4(n+1)l-(2n+1)\right\}\\
&= -\frac{2}{3}(2n+1)(n+1)(4n+3)+4(n+1)^2(2n+1)-(2n+1)^2\\
&= \frac{1}{3}(2n+1)(4n^2+4n+3)
\end{aligned}
$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n^3}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(4+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}\right)=\frac{8}{3}$

［解 説］

4 平面で囲まれた領域にある格子点の個数を求める頻出問題です。平面の方程式は知っていて当然というのが，出題者からのメッセージです。

$\boxed{2}$ ［1999 九州大］

(1) $f(a)=a$ より，$1-a^2=a$，$a^2+a-1=0$

$a>0$ より，$a=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

(2) $|f(x)-f(a)|=|1-x^2-(1-a^2)|=|-(x+a)(x-a)|=|x+a||x-a|$

ここで条件より，$|x+a|\geqq\left|\dfrac{1}{2}+\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

よって，$|f(x)-f(a)|\geqq\dfrac{\sqrt{5}}{2}|x-a|$

(3) $x_{n+1}=f(x_n)$，$a=f(a)$ なので，$x_n\geqq\dfrac{1}{2}$ のとき(2)より，

$$|x_{n+1}-a|=|f(x)-f(a)|\geqq\frac{\sqrt{5}}{2}|x-a|$$

よって，$|x_n-a|\geqq|x_1-a|\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$

(i) $x_1-a\neq 0$ のとき

$n\to\infty$ のとき $|x_n-a|\to\infty$ となるので，すべての n に対しては $x_n\leqq 1$ が成立しない。

(ii) $x_1-a=0$ のとき

$a=f(a)$ なので，すべての n に対して $x_n=a$ となる。

(1)より，$\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq 1$ なので，すべての n に対して $\dfrac{1}{2}\leqq x_n\leqq 1$ が成り立つ。

(i)(ii)より，$x_1=a$ の場合のみ題意が成立する。

［解 説］

(2)の不等式は，(3)で定義された数列の発散条件に対応することがわかります。これを(3)の題意に結びつけることがポイントです。