

2026 入試対策
2次数学ランドマーク

微分と積分34題

文系 + 理系 28か年

1998 — 2025

外林 康治 編著

電送数学舎

微分と積分

【問題一覧】

(注) 問題番号が，対応する解答例へのハイパーリンクになっています。

1 a は 0 でない実数とする。関数 $f(x) = (3x^2 - 4)\left(x - a + \frac{1}{a}\right)$ の極大値と極小値の差が最小となる a の値を求めよ。 [1998 東京大]

2 (1) 曲線 $y = x^3$ と直線 $y = 3x + a$ が異なる 3 点で交わるような a の範囲を求めよ。
 (2) a が(1)の範囲を動くとき、3つの交点を A, B, C とし、点 $(a, 4a)$ を D とする。3つの線分の長さの積 $DA \cdot DB \cdot DC$ の最大値を求めよ。 [1999 一橋大・文]

3 a を実数とする。 x の 2 次方程式 $x^2 - ax = 2 \int_0^1 |t^2 - at| dt$ は $0 \leq x \leq 1$ の範囲にいくつの解をもつか。 [2000 京都大・文]

4 $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2$ とおく。曲線 $y = f(x)$ に点 $(0, a)$ から接線がただ一つ引けるとし、しかもその接線はただ 1 点でこの曲線に接するとする。このときの a の値を求めよ。 [2001 大阪大・理]

5 xy 平面上の曲線 $C: y = x^3$ 上の点 P における接線を、P を中心にして反時計回りに 45° 回転して得られる直線を L とする。 C と L が、相異なる 3 点で交わるような P の範囲を図示せよ。 [2001 京都大・理]

6 a, b, c を実数とする。 $y = x^3 + 3ax^2 + 3bx$ と $y = c$ のグラフが相異なる 3 つの交点をもつという。このとき $a^2 > b$ が成立することを示し、さらにこれらの交点の x 座標のすべては开区間 $(-a - 2\sqrt{a^2 - b}, -a + 2\sqrt{a^2 - b})$ に含まれていることを示せ。 [2002 京都大・理]

7 実数 t に対して、 u の 3 次方程式 $u^3 - 3u + 2t = 0$ の実数解のうちで絶対値が最小のものを $f(t)$ とする。

(1) 媒介変数 t を用いて、 $x = f(t)$, $y = -2t$ (t は実数) と表される曲線を図示せよ。
 (2) 関数 $f(t)$ が連続でない t の値を求め、 $f(t)$ のグラフをかけ。 [2003 千葉大・理]

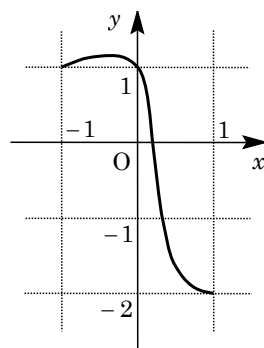
8 放物線 $C: y = -x^2 + 2x + 1$ と x 軸の共有点を $A(a, 0)$, $B(b, 0)$ とし、 C と直線 $y = mx$ の共有点を $P(\alpha, m\alpha)$, $Q(\beta, m\beta)$, 原点を O とする。ただし、 $a < b$, $m \neq 0$, $\alpha < \beta$ とする。線分 OP , OA と C で囲まれた図形の面積と線分 OQ , OB と C で囲まれた図形の面積が等しいとき m の値を求めよ。 [2003 大阪大・文]

- 9 区間 $-1 \leq x \leq 1$ で定義された関数 $f(x)$ が、

$$f(-1) = f(0) = 1, \quad f(1) = -2$$

を満たし、またそのグラフが右図のようになっているという。

このとき、 $\int_{-1}^1 f(x) dx \geq -1$ を示せ。



[2004 京都大・文]

- 10 関数 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ を次で定める。

$$f(x) = x^3 - 3x, \quad g(x) = \{f(x)\}^3 - 3f(x), \quad h(x) = \{g(x)\}^3 - 3g(x)$$

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) a を実数とする。 $f(x) = a$ を満たす実数 x の個数を求めよ。
- (2) $g(x) = 0$ を満たす実数 x の個数を求めよ。
- (3) $h(x) = 0$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

[2004 東京大・文]

- 11 a を正の実数とする。次の問いに答えよ。

- (1) $y = |x^2 - a|x|$ のグラフをかけ。
- (2) $F(a) = \int_{-1}^1 |x^2 - a|x| dx$ を求めよ。
- (3) $F(a)$ の最小値を求めよ。

[2005 神戸大・文]

- 12 $0 \leq k \leq 1$ を満たす実数 k に対して、 xy 平面上に次の連立不等式で表される 3 つの領域 D, E, F を考える。

D は連立不等式 $y \geq x^2$, $y \leq kx$ で表される領域

E は連立不等式 $y \leq x^2$, $y \geq kx$ で表される領域

F は連立不等式 $y \leq -x^2 + 2x$, $y \geq kx$ で表される領域

- (1) 領域 $D \cup (E \cap F)$ の面積 $m(k)$ を求めよ。
- (2) (1) で求めた面積 $m(k)$ を最小にする k の値と、その最小値を求めよ。

[2006 名古屋大・文]

- 13 (1) 関数 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ のグラフをかけ。

- (2) 方程式 $f(x) = a$ (a は実数) が相異なる 3 つの実数解 $\alpha < \beta < \gamma$ をもつとする。
 $l = \gamma - \alpha$ を β のみを用いて表せ。

- (3) a が (2) の条件のもとで変化するとき l の動く範囲を求めよ。 [2007 名古屋大・理]

14 xy 平面において、放物線 $y = x^2$ を C とする。また、実数 k を与えたとき、 $y = x + k$ で定まる直線を l とする。

(1) $-2 < x < 2$ の範囲で C と l が 2 点で交わる時、 k の満たす条件を求めよ。

(2) k が(1)の条件を満たすとき、 C と l および 2 直線 $x = -2$, $x = 2$ で囲まれた 3 つの部分の面積の和 S を k の式で表せ。 [2007 大阪大・文]

15 放物線 $C: y = x^2$ 上の点 P における法線とは、点 P における C の接線と点 P で垂直に交わる直線である。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 点 (p, p^2) における C の法線の方程式を求めよ。

(2) y 軸上の点 $(0, a)$ を通る C の法線の本数を求めよ。 [2008 九州大・文]

16 $f(x) = x^3 - 3x + 1$, $g(x) = x^2 - 2$ とし、方程式 $f(x) = 0$ について考える。このとき、以下のことを示せ。

(1) $f(x) = 0$ は絶対値が 2 より小さい 3 つの相異なる実数解をもつ。

(2) α が $f(x) = 0$ の解ならば、 $g(\alpha)$ も $f(x) = 0$ の解となる。

(3) $f(x) = 0$ の解を小さい順に $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ とすれば、

$$g(\alpha_1) = \alpha_3, \quad g(\alpha_2) = \alpha_1, \quad g(\alpha_3) = \alpha_2$$

となる。

[2009 神戸大・理]

17 k は定数で、 $k > 0$ とする。曲線 $C: y = kx^2 (x \geq 0)$ と 2 つの直線 $l: y = kx + \frac{1}{k}$, $m: y = -kx + \frac{1}{k}$ との交点の x 座標をそれぞれ $\alpha, \beta (0 < \beta < \alpha)$ とするとき、次の問いに答えよ。

(1) $\alpha - \beta$ の値を求めよ。

(2) $\alpha\beta, \alpha^2 + \beta^2$ および $\alpha^3 - \beta^3$ を k を用いて表せ。

(3) 曲線 C と 2 直線 l, m とで囲まれた部分の面積を最小にする k の値を求めよ。また、そのときの面積を求めよ。 [2010 広島大・文]

18 3 辺の長さが a と b と c の直方体を、長さが b の 1 辺を回転軸として 90° 回転させるとき、直方体が通過する点全体がつくる立体を V とする。

(1) V の体積を a, b, c を用いて表せ。

(2) $a + b + c = 1$ のとき、 V の体積のとりうる値の範囲を求めよ。 [2010 東京大・理]

19 xyz 空間で、原点 O を中心とする半径 $\sqrt{6}$ の球面 S と 3 点 $(4, 0, 0)$, $(0, 4, 0)$, $(0, 0, 4)$ を通る平面 α が共有点をもつことを示し、点 (x, y, z) がその共有点全体の集合を動くとき、積 xyz が取り得る値の範囲を求めよ。 [2011 京都大・理]

20 関数 $f(x) = x^3 + 3x^2 + x - 1$ を考える。曲線 $C: y = f(x)$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) $t \geq 0$ のとき、曲線 C は傾きが t である接線を 2 本もつことを示せ。
- (2) (1)において、傾きが t である 2 本の接線と曲線 C との接点を、それぞれ $P(p, f(p))$, $Q(q, f(q))$ とする (ただし $p < q$)。このとき、点 P と点 Q は点 $A(-1, 0)$ に関して対称の位置にあることを示せ。
- (3) $t \geq 0$ のとき、2 点 P, Q の距離の最小値を求めよ。また、最小値を与えるときの P, Q の x 座標 p, q もそれぞれ求めよ。 [2012 九州大・文]

21 a を正の定数とし、 xy 平面上の曲線 C の方程式を $y = x^3 - a^2x$ とする。

- (1) C 上の点 $A(t, t^3 - a^2t)$ における C の接線を l とする。 l と C で囲まれた図形の面積 $S(t)$ を求めよ。ただし、 t は 0 でないとする。
- (2) b を実数とする。 C の接線のうち xy 平面上の点 $B(2a, b)$ を通るものの本数を求めよ。
- (3) C の接線のうち点 $B(2a, b)$ を通るものが 2 本のみの場合を考え、それらの接線を l_1, l_2 とする。ただし、 l_1 と l_2 はどちらも原点 $(0, 0)$ を通らないとする。 l_1 と C で囲まれた図形の面積を S_1 とし、 l_2 と C で囲まれた図形の面積を S_2 とする。 $S_1 \geq S_2$ として、 $\frac{S_1}{S_2}$ の値を求めよ。 [2012 名古屋大・理]

22 c を $0 < c < 1$ を満たす実数とする。 $f(x)$ を 2 次以下の多項式とし、曲線 $y = f(x)$ が 3 点 $(0, 0)$, $(c, c^3 - 2c)$, $(1, -1)$ を通るとする。次の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ を求めよ。
- (2) 曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = x^3 - 2x$ で囲まれた部分の面積 S を c を用いて表せ。
- (3) (2)で求めた S を最小にするような c の値を求めよ。 [2013 神戸大・理]

23 原点を O とする xy 平面上に、放物線 $C: y=1-x^2$ がある。 C 上に 2 点 $P(p, 1-p^2)$, $Q(q, 1-q^2)$ を $p < q$ となるようにとる。

- (1) 2 つの線分 OP , OQ と放物線 C で囲まれた部分の面積 S を、 p と q の式で表せ。
- (2) $q = p+1$ であるとき S の最小値を求めよ。
- (3) $pq = -1$ であるとき S の最小値を求めよ。 [2013 一橋大・文]

24 $a > 0$ を実数とする。関数 $f(t) = -4t^3 + (a+3)t$ の $0 \leq t \leq 1$ における最大値を $M(a)$ とする。

- (1) $M(a)$ を求めよ。
- (2) 実数 $x > 0$ に対し、 $g(x) = M(x)^2$ とおく。 xy 平面において、関数 $y = g(x)$ のグラフに点 $(s, g(s))$ で接する直線が原点を通るとき、実数 $s > 0$ とその接線の傾きを求めよ。
- (3) a が正の実数全体を動くとき、 $k = \frac{M(a)}{\sqrt{a}}$ の最小値を求めよ。 [2015 東北大・文]

25 実数 a, b に対し、 $f(x) = x^3 - 3ax + b$ とおく。 $-1 \leq x \leq 1$ における $|f(x)|$ の最大値を M とする。このとき以下の各問いに答えよ。

- (1) $a > 0$ のとき、 $f(x)$ の極値を a, b を用いて表せ。
- (2) $b \geq 0$ のとき、 M を a, b を用いて表せ。
- (3) a, b が実数全体を動くとき、 M のとりうる値の範囲を求めよ。

[2015 東京医科歯科大・医]

26 座標平面において、 x 軸上に 3 点 $(0, 0)$, $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$ ($0 < \alpha < \beta$) があり、曲線 $C: y = x^3 + ax^2 + bx$ が x 軸とこの 3 点で交わっているものとする。ただし、 a, b は実数である。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 曲線 C と x 軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和を S とする。 S を α と β の式で表せ。
- (2) β の値を固定して、 $0 < \alpha < \beta$ の範囲で α を動かすとき、 S を最小とする α を β の式で表せ。 [2016 九州大・文]

27 a, b, c を実数とし、 β, m をそれぞれ $0 < \beta < 1, m > 0$ を満たす実数とする。また、関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ は $x = \beta, -\beta$ で極値をとり、 $f(-1) = f(\beta) = -m, f(1) = f(-\beta) = m$ を満たすとする。

(1) a, b, c および β, m の値を求めよ。

(2) 関数 $g(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ は、 $-1 \leq x \leq 1$ に対して $f(-1) \leq g(x) \leq f(1)$ を満たすとする。 $h(x) = f(x) - g(x)$ とおくとき、 $h(-1), h(-\beta), h(\beta), h(1)$ それぞれと 0 との大きさを比較することにより、 $h(x)$ を求めよ。 [2017 筑波大・理]

28 a を正の定数とする。2 次関数 $f(x) = ax^2$ と 3 次関数 $g(x) = x(x-4)^2$ について、次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y = g(x)$ について、極値を求め、そのグラフを描け。

(2) 2 つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ は相異なる 3 点で交わることを示せ。

(3) 2 つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるように a の値を定めよ。またそのとき、2 つの曲線の交点の x 座標を求めよ。

[2017 名古屋大・文]

29 実数 a, b, c に対し、関数 $f(x) = x^3 - 3ax^2 + bx + c$ を考える。1 次関数 $g(x)$ があり、 $f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ は、すべての x に対し等式 $f(x) = f'(x)g(x) - 6x$ を満たしているとする。

(1) b と c を a で表せ。

(2) 3 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる 3 個の実数解をもつように、 a の値の範囲を定めよ。

[2019 北海道大・文]

30 a を正の実数とする。座標平面上の曲線 C を $y = ax^3 - 2x$ で定める。原点を中心とする半径 1 の円と C の共有点の個数が 6 個であるような a の範囲を求めよ。

[2021 東京大・文]

31 座標平面上の曲線 $y = x^3 + x^2$ を C とする。また、 a を実数とし、 L_a を点 $(-1, 0)$ を通る傾き a の直線とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) C と L_a がちょうど 2 つの共有点をもつような a の値をすべて求めよ。
- (2) a が(1)の条件を満たすそれぞれの場合について、 C と L_a で囲まれた部分の面積を求めよ。
- (3) C と L_a がちょうど 3 つの共有点を持ち、さらに C と L_a で囲まれた 2 つの部分の面積の差の絶対値が $\frac{3}{2}$ となるときの、 a の値を求めよ。 [2022 広島大・理]

32 a を実数とし、2 つの関数 $f(x) = x^3 - (a+2)x^2 + (a-2)x + 2a+1$ と $g(x) = -x^2 + 1$ を考える。

- (1) $f(x) - g(x)$ を因数分解せよ。
- (2) $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフの共有点が 2 個であるような a を求めよ。
- (3) a は(2)の条件を満たし、さらに $f(x)$ の極大値は 1 よりも大きいとする。
 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフを同じ座標平面に図示せよ。 [2023 名古屋大・文]

33 次の問いに答えよ。

- (1) a を実数とする。次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (2) 関数 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $\dots$ を次の関係式で定める。

$$f_1(x) = 3x, \quad f_{n+1}(x) = (n+2)x^{n+1} + \left(\int_0^1 f_n(t) dt \right) x \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

関数 $f_n(x)$ を x と n の式で表せ。

[2024 北海道大・理]

34 a を実数とし、関数 $f(x)$ を次のように定める。 $f(x) = x^4 + \frac{4a}{3}x^3 + (a+2)x^2$

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 関数 $f(x)$ が極大値をもつような a のとり得る値の範囲を求めよ。
- (2) 関数 $f(x)$ が $x = 0$ で極大値をもつような a のとり得る値の範囲を求めよ。

[2025 東北大・理]

微分と積分

【解答例と解説】

(注) 問題番号が、対応する問題ページへのハイパーリンクになっています。

1

[1998 東京大]

$$f(x) = (3x^2 - 4)\left(x - a + \frac{1}{a}\right) \text{ より,}$$

$$f'(x) = 6x\left(x - a + \frac{1}{a}\right) + (3x^2 - 4) = 9x^2 - 6\left(a - \frac{1}{a}\right)x - 4$$

$f'(0) = -4 < 0$ から, $f'(x) = 0$ は 2 つの実数解をもち, これを $x = \alpha, \beta$ ($\alpha < \beta$) とおくと,

$$\alpha = \frac{a - \frac{1}{a} - \sqrt{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + 4}}{3}, \quad \beta = \frac{a - \frac{1}{a} + \sqrt{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + 4}}{3}$$

極大値と極小値の差を $g(a)$ とすると,

$$g(a) = f(\alpha) - f(\beta)$$

$$= \int_{\beta}^{\alpha} f'(x) dx$$

$$= \int_{\beta}^{\alpha} 9(x - \alpha)(x - \beta) dx$$

$$= 9 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) (\alpha - \beta)^3 = \frac{3}{2} (\beta - \alpha)^3 = \frac{3}{2} \left\{ \frac{2}{3} \sqrt{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + 4} \right\}^3$$

$$= \frac{4}{9} \left\{ \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + 4 \right\}^{\frac{3}{2}}$$

$g(a)$ は $a - \frac{1}{a} = 0$, すなわち $a = \pm 1$ のとき最小になる。

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

[解 説]

3 次関数の極大値と極小値の差を求めるという頻出問題で, 上のような特殊な解法があります。ただし本問では, $f'(x) = 0$ の解が $x = \frac{2}{3}a, -\frac{2}{3a}$ となりますので, a の正負で場合分けをして, 直接 $g(a)$ を求めても, 計算量がやや増える程度ですみます。

2

[1999 一橋大・文]

(1) $y = x^3 \cdots \cdots \textcircled{1}$, $y = 3x + a \cdots \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}\textcircled{2}$ より, $x^3 - 3x = a \cdots \cdots \textcircled{3}$

$\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ が異なる3点で交わる条件は, 曲線 $y = x^3 - 3x$ と直線 $y = a$ が異なる3点で交わる条件と同値である。

ここで, $f(x) = x^3 - 3x$ とおくと,
 $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

右表より, 求める条件は $-2 < a < 2$

(2) $\textcircled{3}$ の解を $x = \alpha, \beta, \gamma$ ($\alpha < \beta < \gamma$) とし, $A(\alpha, 3\alpha + a)$,
 $B(\beta, 3\beta + a)$, $C(\gamma, 3\gamma + a)$ とおく。

このとき, $\textcircled{3}$ を $x^3 - 3x - a = 0$ と変形すると,

$$x^3 - 3x - a = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \cdots \cdots \textcircled{4}$$

このとき, $DA = \sqrt{(\alpha - a)^2 + (3\alpha + a - 4a)^2}$
 $= \sqrt{10(\alpha - a)^2} = \sqrt{10}|\alpha - a|$

同様に, $DB = \sqrt{10}|\beta - a|$, $DC = \sqrt{10}|\gamma - a|$

$$\begin{aligned} DA \cdot DB \cdot DC &= 10\sqrt{10}|\alpha - a||\beta - a||\gamma - a| \\ &= 10\sqrt{10}|(a - \alpha)(a - \beta)(a - \gamma)| \\ &= 10\sqrt{10}|a^3 - 3a - a| \quad (\textcircled{4} \text{より}) \\ &= 10\sqrt{10}|a^3 - 4a| \end{aligned}$$

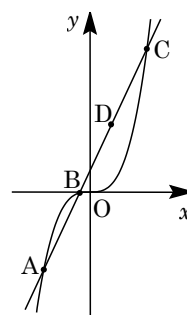
ここで, $g(a) = a^3 - 4a$ とおくと, $g'(a) = 3a^2 - 4 = (\sqrt{3}a + 2)(\sqrt{3}a - 2)$

右表より, $|g(a)|$ は
 $a = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$ のとき最大値

$\frac{16}{9}\sqrt{3}$ をとる。よって,

$DA \cdot DB \cdot DC$ の最大値は

$$10\sqrt{10} \cdot \frac{16}{9}\sqrt{3} = \frac{160}{9}\sqrt{30} \text{ となる。}$$



a	-2	$\cdots$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	2
$g'(a)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(a)$	0	$\nearrow$	$\frac{16}{9}\sqrt{3}$	$\searrow$	$-\frac{16}{9}\sqrt{3}$	$\nearrow$	0

[解 説]

微分法の応用に関する問題です。本問のポイントは, 強いて言えば, (2)で $\textcircled{4}$ 式に注目することです。

3

[2000 京都大・文]

$I = \int_0^1 |t^2 - at| dt$ とおくと, $x^2 - ax = 2I$ の解の個数は, $y = x^2 - ax$ と $y = 2I$ のグ

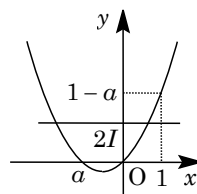
ラフの共有点の個数と一致する。

(i) $a < 0$ のとき

$$I = \int_0^1 (t^2 - at) dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{a}{2}t^2 \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{a}{2}$$

$$2I - (1 - a) = \frac{2}{3} - a - 1 + a = -\frac{1}{3} < 0$$

よって, $0 < 2I < 1 - a$ となるので, 右図より, $0 \leq x \leq 1$ の範囲に解は 1 個である。



(ii) $0 \leq a \leq 1$ のとき

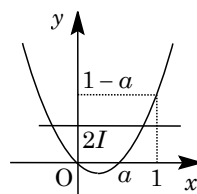
$$I = \int_0^a -(t^2 - at) dt + \int_a^1 (t^2 - at) dt = -\left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{a}{2}t^2 \right]_0^a + \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{a}{2}t^2 \right]_a^1$$

$$= \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}$$

$$2I - (1 - a) = \frac{2}{3}a^3 - a + \frac{2}{3} - 1 + a = \frac{1}{3}(2a^3 - 1)$$

(ii-i) $2I \leq 1 - a$ ($0 \leq a \leq \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$) のとき

$0 < 2I \leq 1 - a$ となるので, 右図より, $0 \leq x \leq 1$ の範囲に解は 1 個である。



(ii-ii) $2I > 1 - a$ ($\frac{1}{\sqrt[3]{2}} < a \leq 1$) のとき

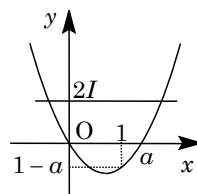
$0 < 1 - a < 2I$ となるので, $0 \leq x \leq 1$ の範囲に解はない。

(iii) $1 < a$ のとき

$0 < 2I$ となるので, 右図より, $0 \leq x \leq 1$ の範囲に解はない。

(i)~(iii)より, 求める解の個数は,

$$a \leq \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \text{ のとき } 1 \text{ 個}, \quad \frac{1}{\sqrt[3]{2}} < a \text{ のとき } 0 \text{ 個}$$



[解 説]

当然ですが, $I > 0$ です。これが場合分けを少なくし, 議論をスッキリさせるポイントです。

4

[2001 大阪大・理]

$f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2$ より, $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x$

接点を $(t, t^4 + t^3 - 3t^2)$ とおくと, 接線の方程式は,

$$y - (t^4 + t^3 - 3t^2) = (4t^3 + 3t^2 - 6t)(x - t)$$

$$y = (4t^3 + 3t^2 - 6t)x - 3t^4 - 2t^3 + 3t^2 \dots\dots\dots ①$$

①が点 $(0, a)$ を通るので,

$$a = -3t^4 - 2t^3 + 3t^2 \dots\dots\dots ②$$

ここで, $g(t) = -3t^4 - 2t^3 + 3t^2$ とおくと,

$$g'(t) = -12t^3 - 6t^2 + 6t$$

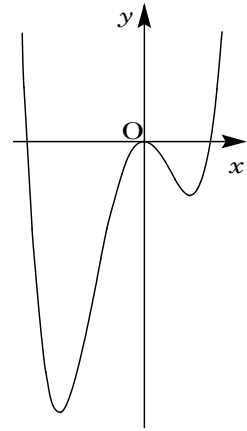
$$= -6t(2t-1)(t+1)$$

点 $(0, a)$ を通る複接線以外の接線が 1 本だけ引ける条件は,

②がただ 1 つの実数解をもつことに対応する。

すると, 右表において $2 > \frac{5}{16}$

なので, $a = 2$ のときである。



t	...	-1	...	0	...	$\frac{1}{2}$	...
$g'(t)$	+	0	-	0	+	0	-
$g(t)$	↗	2	↘	0	↗	$\frac{5}{16}$	↘

[解 説]

問題文の「ただ 1 点でこの曲線に接する」というコメントは, 4 次曲線では現れる複接線を除外するというものです。