

2026 入試対策
2次数学ランドマーク

図形と式37題

文系＋理系 28か年

1998 — 2025

外林 康治 編著

電送数学舎

図形と式

【問題一覧】

(注) 問題番号が，対応する解答例へのハイパーリンクになっています。

- 1 次の連立不等式の表す領域が三角形の内部になるような点 (a, b) の集合を式で表し、図示せよ。

$$x - y < 0, \quad x + y < 2, \quad ax + by < 1$$

[1998 北海道大・理]

- 2 c を $c > \frac{1}{4}$ を満たす実数とする。 xy 平面上の放物線 $y = x^2$ を A とし、直線 $y = x - c$ に関して A と対称な放物線を B とする。点 P が放物線 A 上を動き、点 Q が放物線 B 上を動くとき、線分 PQ の長さの最小値を c を用いて表せ。[1999 東京大・文]

- 3 曲線 $y = x^2$ の点 (a, a^2) での接線を l とする。 l 上の点で x 座標が $a - 1$ と $a + 1$ のものをそれぞれ P および Q とする。 a が $-1 \leq a \leq 1$ の範囲を動くとき線分 PQ の動く範囲の面積を求めよ。[1999 東北大・理]

- 4 xy 平面内の領域 $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$ において、 $1 - ax - by - axy$ の最小値が正となるような定数 a, b を座標とする点 (a, b) の範囲を図示せよ。[2000 東京大・文]

- 5 放物線 $y = x^2$ 上に、直線 $y = ax + 1$ に関して対称な位置にある異なる 2 点 P, Q が存在するような a の範囲を求めよ。[2001 一橋大・文]

- 6 実数 t に対して、 xy 平面上の直線 $(1 - t^2)x - 2ty = 1 + t^2$ は、 t の値によらずある円 C に接しているものとする。次の問いに答えよ。

(1) 円 C の方程式を求めよ。また、接点の座標を求めよ。

(2) t が $t \geq 1$ の範囲を動くとき、直線の通過する範囲を図示せよ。[2002 神戸大・文]

- 7 a, b を実数とする。次の 4 つの不等式を同時に満たす点 (x, y) 全体からなる領域を D とする。

$$x + 3y \geq a, \quad 3x + y \geq b, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

領域 D における $x + y$ の最小値を求めよ。

[2003 東京大・文]

- 8 xy 平面の放物線 $y = x^2$ 上の 3 点 P, Q, R が次の条件を満たしている。

$\triangle PQR$ は 1 辺の長さ a の正三角形であり、点 P, Q を通る直線の傾きは $\sqrt{2}$ である。

このとき、 a の値を求めよ。

[2004 東京大]

9 不等式 $y \leq -(x-1)^2$ の表す領域を A_1 、不等式 $y \leq -(x+1)^2$ の表す領域を A_2 とする。 A_1 と A_2 の和集合 $A_1 \cup A_2$ を A とする。また、不等式 $y \geq (x-a)^2 + b$ の表す領域を B とする。次の問いに答えよ。

- (1) $a=0$ 、 $b=-1$ とするとき、 A と B の共通部分 $A \cap B$ の面積を求めよ。
- (2) A_1 と B の共通部分 $A_1 \cap B$ が空集合でないための条件を a, b で表せ。
- (3) A と B の共通部分 $A \cap B$ が空集合でないとき点 (a, b) の存在範囲を座標平面に図示せよ。

[2005 金沢大・文]

10 a を定数とし、 x の2次関数 $f(x)$ 、 $g(x)$ を次のように定める。

$$f(x) = x^2 - 3, \quad g(x) = -2(x-a)^2 + \frac{a^2}{3}$$

- (1) 2つの放物線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が2つの共有点をもつような a の範囲を求めよ。
- (2) (1)で求めた範囲に属する a に対して、2つの放物線によって囲まれる図形を C_a とする。 C_a の面積を a で表せ。
- (3) a が(1)で求めた範囲を動くとき、少なくとも1つの C_a に属する点全体からなる図形の面積を求めよ。

[2005 一橋大・文]

11 θ を $0 \leq \theta < 2\pi$ を満たす実数とする。時刻 t における座標が

$$x = t \cos \theta, \quad y = 1 - t^2 + t \sin \theta$$

で与えられるような動点 $P(x, y)$ を考える。 t が実数全体を動くとき、点 P が描く曲線を C とする。 C が x 軸の $x \geq 0$ の部分と交わる点を Q とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき、 Q の x 座標を求めよ。
- (2) θ が変化すると曲線 C も変化する。 θ が $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲を変化するとき、 C が通過する範囲を xy 平面上に図示せよ。
- (3) θ が変化すると点 Q も変化する。 Q の x 座標が最大となるような θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) について $\tan \theta$ の値を求めよ。

[2005 大阪大・理]

12 座標平面上に 3 点 $O(0, 0)$, $A(4, 2)$, $B(6, 0)$ を考える。平面上の直線 l に関して点 A と対称な点が線分 OB 上にあるとき、直線 l をピッタリ直線と呼ぶことにする。

- (1) 点 $P(p, q)$ を通るピッタリ直線 l があるとし、 l に関して A と対称な点を $A'(t, 0)$ ($0 \leq t \leq 6$) とするとき、 p, q, t の間に成り立つ関係式を求めよ。
- (2) ピッタリ直線が 2 本通る点 $P(p, q)$ の存在範囲を求め、それを図示せよ。図には三角形 OAB も書いておくこと。
- (3) 点 $P(p, q)$ を通る 2 本のピッタリ直線が直交するような点 $P(p, q)$ の存在範囲を求め、それを図示せよ。

[2006 名古屋大・理]

13 座標平面上の 2 点 P, Q が、曲線 $y = x^2$ ($-1 \leq x \leq 1$) 上を自由に動くとき、線分 PQ を $1:2$ に内分する点 R が動く範囲を D とする。ただし、 $P = Q$ のときは $R = P$ とする。

- (1) a を $-1 \leq a \leq 1$ を満たす実数とすると、点 (a, b) が D に属するための b の条件を a を用いて表せ。
- (2) D を図示せよ。

[2007 東京大・理]

14 a を正の実数とする。点 (x, y) が、不等式 $x^2 \leq y \leq x$ の定める領域を動くとき、つねに $\frac{1}{2} \leq (x-a)^2 + y \leq 2$ となる。 a の値の範囲を求めよ。

[2008 一橋大・文]

15 座標平面上の 3 点 $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(x, y)$ を考える。ただし $y > 0$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) $\triangle ABC$ が二等辺三角形であるとする。そのとき x, y が満たす条件を求め、点 C の存在範囲を図示せよ。
- (2) $\triangle ABC$ が鋭角三角形であるとする。そのとき x, y が満たす条件を求め、点 C の存在範囲を図示せよ。
- (3) 3 つの角 $\angle CAB, \angle ABC, \angle BCA$ をそれぞれ α, β, γ とし、不等式

$$\alpha \leq \beta \leq \gamma < \frac{\pi}{2}$$

を満たすとする。そのとき x, y が満たす条件を求め、点 C の存在範囲を図示せよ。

- (4) x, y が (3) の条件を満たすとき、 γ がとりうる値の範囲を求めよ。[2009 広島大・理]

16 実数 a に対し, 不等式 $y \leq 2ax - a^2 + 2a + 2$ の表す座標平面上の領域を $D(a)$ とおく。

(1) $-1 \leq a \leq 2$ を満たすすべての a に対し $D(a)$ の点となるような点 (p, q) の範囲を図示せよ。

(2) $-1 \leq a \leq 2$ を満たすいずれかの a に対し $D(a)$ の点となるような点 (p, q) の範囲を図示せよ。

[2011 東北大・理]

17 以下の問いに答えよ。

(1) t を正の実数とするととき, $|x| + |y| = t$ の表す xy 平面上の図形を図示せよ。

(2) a を $a \geq 0$ を満たす実数とする。 x, y が連立不等式

$$ax + (2-a)y \geq 2, \quad y \geq 0$$

を満たすとき, $|x| + |y|$ のとりうる値の最小値 m を, a を用いた式で表せ。

(3) a が $a \geq 0$ の範囲を動くとき, (2) で求めた m の最大値を求めよ。 [2011 神戸大・理]

18 座標平面上に 2 点 $A(1, 0)$, $B(-1, 0)$ と直線 l があり, A と l の距離と B と l の距離の和が 1 であるという。以下の問いに答えよ。

(1) l は y 軸と平行でないことを示せ。

(2) l が線分 AB と交わる時, l の傾きを求めよ。

(3) l が線分 AB と交わらないとき, l と原点との距離を求めよ。 [2012 神戸大]

19 s, t を実数とする。以下の問いに答えよ。

(1) $x = s + t + 1$, $y = s - t - 1$ とおく。 s, t が $s \geq 0, t \geq 0$ の範囲を動くとき, 点 (x, y) の動く範囲を座標平面内に図示せよ。

(2) $x = st + s - t + 1$, $y = s + t - 1$ とおく。 s, t が実数全体を動くとき, 点 (x, y) の動く範囲を座標平面内に図示せよ。

[2012 東北大・理]

20 a, b, c は実数とし, $a < b$ とする。平面上の相異なる 3 点 $A(a, a^2)$, $B(b, b^2)$, $C(c, c^2)$ が, 辺 AB を斜辺とする直角三角形を作っているとする。次の問いに答えよ。

(1) a を b, c を用いて表せ。

(2) $b - a \geq 2$ が成り立つことを示せ。

(3) 斜辺 AB の長さの最小値と, そのときの A, B, C の座標をそれぞれ求めよ。

[2013 神戸大・文]

21 座標平面上の 2 点 $A(0, 1)$ $B(t, 0)$ を考える。ただし、 $t \geq 0$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) 線分 AB を 1 辺とする正三角形は 2 つある。それぞれの正三角形について、2 点 A, B 以外の頂点の座標を t を用いて表せ。
- (2) (1) で求めた 2 点のうち x 座標が小さい方を C とする。 t を動かすとき、点 C の軌跡を図示せよ。
- (3) k を定数とする。点 B と直線 $y = kx$ 上の点 P をそれぞれうまく選ぶことで 3 点 A, B, P を頂点とする正三角形ができるとき、 k の値の範囲を求めよ。

[2013 広島大・理]

22 座標平面の原点を O で表す。線分 $y = \sqrt{3}x$ ($0 \leq x \leq 2$) 上の点 P と、線分 $y = -\sqrt{3}x$ ($-2 \leq x \leq 0$) 上の点 Q が、線分 OP と線分 OQ の長さの和が 6 となるように動く。このとき、線分 PQ の通過する領域を D とする。

- (1) s を $0 \leq s \leq 2$ を満たす実数とすると、点 (s, t) が D に入るような t の範囲を求めよ。
- (2) D を図示せよ。

[2014 東京大・理]

23 座標平面上の原点を O とする。点 $A(a, 0)$ 、点 $B(0, b)$ および点 C が、 $OC = 1$ 、 $AB = BC = CA$ を満たしながら動く。

- (1) $s = a^2 + b^2$ 、 $t = ab$ とする。 s と t の関係を表す等式を求めよ。
- (2) $\triangle ABC$ の面積のとりうる値の範囲を求めよ。

[2015 一橋大・文]

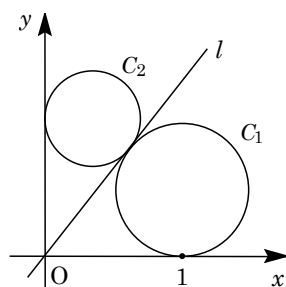
24 l を座標平面上の原点を通り傾きが正の直線とする。さらに以下の 3 条件(i), (ii), (iii) で定まる円 C_1 、 C_2 を考える。

(i) 円 C_1 、 C_2 は 2 つの不等式 $x \geq 0$ 、 $y \geq 0$ で定まる領域に含まれる。

(ii) 円 C_1 、 C_2 は直線 l と同一点で接する。

(iii) 円 C_1 は x 軸と点 $(1, 0)$ で接し、円 C_2 は y 軸と接する。

円 C_1 の半径を r_1 、円 C_2 の半径を r_2 とする。 $8r_1 + 9r_2$ が最小となるような直線 l の方程式と、その最小値を求めよ。



[2015 東京大・文]

25 座標平面上の 2 点 $A(-1, 1)$, $B(1, -1)$ を考える。また、 P を座標平面上の点とし、その x 座標の絶対値は 1 以下であるとする。次の条件(i)または(ii)を満たす点 P の範囲を図示し、その面積を求めよ。

(i) 頂点の x 座標の絶対値が 1 以上の 2 次関数のグラフで、点 A , P , B をすべて通るものがある。

(ii) 点 A , P , B は同一直線上にある。 [2015 東京大・文]

26 座標平面上の 3 点 $P(x, y)$, $Q(-x, -y)$, $R(1, 0)$ が鋭角三角形をなすための (x, y) についての条件を求めよ。また、その条件を満たす点 $P(x, y)$ の範囲を図示せよ。 [2016 東京大・文]

27 a, b を実数とする。 $y = |x^2 - 4|$ で表される曲線を C とし、 $y = ax + b$ で表される直線を l とする。

(1) l が点 $(-2, 0)$ を通り、 l と C がちょうど 3 つの共有点をもつような a, b の条件を求めよ。

(2) l と C がちょうど 3 つの共有点をもつような点 (a, b) の軌跡を ab 平面上に図示せよ。 [2017 東北大・理]

28 次の問いに答えよ。

(1) 次の条件(A)を満たす座標平面上の点 (u, v) の存在範囲を図示せよ。

(A) 2 次式 $t^2 - ut + v$ は、 $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ を満たす実数 x, y を用いて $t^2 - ut + v = (t - x)(t - y)$ と因数分解される。

(2) 次の条件(B)を満たす座標平面上の点 (u, v) の存在範囲を図示せよ。

(B) 2 次式 $t^2 - ut + v$ は、 $0 \leq x \leq 1$, $1 \leq y \leq 2$ を満たす実数 x, y を用いて $t^2 - ut + v = (t - x)(t - y)$ と因数分解される。

(3) 座標平面上の点 (x, y) が 4 点 $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$, $(0, 2)$ を頂点とする長方形の周および内部を動くとき、点 $(x + y, xy)$ の動く範囲の面積を求めよ。

[2018 広島大・理]

29 xy 平面における 2 つの放物線 $C: y = (x - a)^2 + b$, $D: y = -x^2$ を考える。

(1) C と D が異なる 2 点で交わり、その 2 交点の x 座標の差が 1 となるように実数 a, b が動くとき、 C の頂点 (a, b) の軌跡を図示せよ。

(2) 実数 a, b が(1)の条件を満たしながら動くとき、 C と D の 2 交点を結ぶ直線が通過する範囲を求め、図示せよ。 [2018 東北大・理]

30 θ が $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき、座標平面上の直線 $y = (\sin \theta)x + \cos \theta$ 上の点 (x, y) について、不等式 $-|x| \leq y \leq \sqrt{x^2 + 1}$ が成り立つことを示せ。

[2018 信州大・医]

31 放物線 $y = x^2$ のうち $-1 \leq x \leq 1$ を満たす部分を C とする。座標平面上の原点 O と点 $A(1, 0)$ を考える。

- (1) 点 P が C 上を動くとき、 $\overrightarrow{OQ} = 2\overrightarrow{OP}$ を満たす点 Q の軌跡を求めよ。
- (2) 点 P が C 上を動き、点 R が線分 OA 上を動くとき、 $\overrightarrow{OS} = 2\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OR}$ を満たす点 S が動く領域を座標平面上に図示し、その面積を求めよ。

[2018 東京大・文]

32 座標平面上の直線 l を $y = ax - a - 2$ 、直線 m を $y = bx + 3b$ とおく。直線 l と直線 m は互いに直交しながら座標平面上を動くとする。ただし、 a, b は l と m の条件を保ちながら実数値をとって変化するものとする。以下の問いに答えよ。

- (1) 直線 l と直線 m の交点 P の軌跡を求めよ。
- (2) 点 $A(1, -2)$ 、点 $B(-3, 0)$ に対して、線分 AP および線分 BP の長さを a を用いて表せ。
- (3) $\triangle APB$ の面積が最大となるときの a の値を求めよ。

[2019 熊本大・医]

33 x の 2 次関数で、そのグラフが $y = x^2$ のグラフと 2 点で直交するようなものをすべて求めよ。ただし、2 つの関数のグラフがある点で直交するとは、その点が 2 つのグラフの共有点であり、かつ接線どうしが直交することをいう。

[2020 京都大・文]

34 a, b を実数とする。座標平面上の放物線 $C: y = x^2 + ax + b$ は放物線 $y = -x^2$ と 2 つの共有点をもち、一方の共有点の x 座標は $-1 < x < 0$ を満たし、他方の共有点の x 座標は $0 < x < 1$ を満たす。

- (1) 点 (a, b) のとりうる範囲を座標平面上に図示せよ。
- (2) 放物線 C の通りうる範囲を座標平面上に図示せよ。

[2021 東京大]

35 関数 $f(x)$ に対して、座標平面上の 2 つの点 $P(x, f(x))$, $Q(x+1, f(x)+1)$ を考える。実数 x が $0 \leq x \leq 2$ の範囲を動くとき、線分 PQ が通過してできる図形の面積を S とおく。以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x) = -2|x-1|+2$ に対して、 S の値を求めよ。

(2) 関数 $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2$ に対して、曲線 $y = f(x)$ の接線で、傾きが 1 のものの方程式を求めよ。

(3) 設問(2)の関数 $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2$ に対して、 S の値を求めよ。 [2023 東北大・文]

36 a と r を正の実数とする。座標平面上の放物線 $y = x^2$ と、中心 $(0, a)$ 、半径 r の円 C を考える。次の問いに答えよ。

(1) $a = r$ とする。このとき、放物線 $y = x^2$ と円 C との共有点が 1 つのみになるような r の値の範囲を求めよ。

(2) 円 C が不等式 $y > 0$ を表す領域に含まれるための必要十分条件を a と r を用いて表せ。

(3) a と r は(2)で求めた条件を満たすとする。このとき、放物線 $y = x^2$ と円 C との共有点がちょうど 2 つになるような (r, a) の範囲を ra 平面に図示せよ。

(4) 正の実数 s に対し、中心 $(0, a+r+s)$ 、半径 s の円を C' とする。円 C と円 C' は次の条件(i)と(ii)を満たすとする。

(i) 円 C は不等式 $y > 0$ の表す領域に含まれ、さらに放物線 $y = x^2$ と円 C との共有点はちょうど 2 つである。

(ii) 放物線 $y = x^2$ と円 C' との共有点はちょうど 2 つである。

このとき、 s を r を用いて表せ。

[2024 広島大・文]

37 座標平面上に原点を中心とする半径 3 の円 C_1 がある。また、直線 $x = 2$ 上の点 P を中心とする半径 1 の円を C_2 とする。

(1) C_1 と C_2 が共有点を 2 つもつような P の y 座標の範囲を求めよ。

(2) C_1 と C_2 が共有点を 2 つもつとき、その 2 つの共有点を通る直線を l とする。 l に関して P と対称な位置にある点を Q とする。ただし、 P が l 上にあるときは $Q = P$ とする。 P の y 座標が(1)で求めた範囲を動くとき、点 Q の軌跡を求め、図示せよ。

[2025 一橋大・文]

図形と式

【解答例と解説】

(注) 問題番号が、対応する問題ページへのハイパーリンクになっています。

1

[1998 北海道大・理]

条件より, $x - y < 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$, $x + y < 2 \cdots \cdots \textcircled{2}$

$$ax + by < 1 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

①かつ②の表す領域は右図の網点部。

③に $(x, y) = (0, 0)$ を代入すると, つねに成立することより, ③の表す領域は, 直線 $ax + by = 1 \cdots \cdots \textcircled{4}$ を境界とし, 原点を含む側である。

ここで, 直線 $x - y = 0$ と④との交点は,

$$(a + b)x = 1, \quad x = \frac{1}{a + b} \quad (a \neq -b)$$

また, 直線 $x + y = 2$ と④との交点は,

$$ax + b(2 - x) = 1, \quad x = \frac{1 - 2b}{a - b} \quad (a \neq b)$$

以上より, ①②③が三角形の内部を表す条件は,

$$\frac{1}{a + b} < 0 \cdots \cdots \textcircled{5} \text{ かつ } \frac{1 - 2b}{a - b} < 1 \cdots \cdots \textcircled{6}$$

⑤より, $a + b < 0$, $b < -a \cdots \cdots \textcircled{7}$

⑥より, $(1 - 2b)(a - b) < (a - b)^2$ となり,

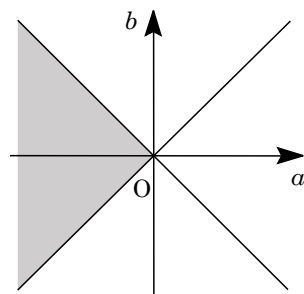
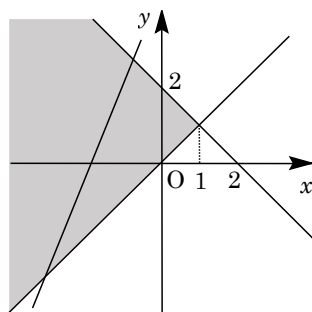
$$(a - b)(a - b - 1 + 2b) > 0$$

$$(a - b)(a + b - 1) > 0$$

⑦から $a + b - 1 < 0$ なので, $a - b < 0$, $b > a \cdots \cdots \textcircled{7}$

⑥⑦より, $a < b < -a$

点 (a, b) の集合を図示すると右図の網点部となる。ただし, 境界線は含まない。



[解 説]

③の領域については, 直線④を境界とし, 原点を含むか否かで決定しました。また, 直線④と直線 $y = x$ および $y = -x + 2$ との交点の範囲をもとにして三角形の形成条件を導きました。

2

[1999 東京大・文]

放物線 A と、 A と線対称な放物線 B に、対称軸 $y = x - c$ に平行な直線を引き、放物線 A との接点を P_0 、放物線 B との接点を Q_0 としたとき、線分 P_0Q_0 は対称軸と直交する。

すると、線分 PQ の長さの最小値は線分 P_0Q_0 の長さとなる。

ここで、放物線 $A: y = x^2 \cdots \cdots ①$ と対称軸に平行な直線 $y = x + k \cdots \cdots ②$ が接するとき、①②より、

$$x^2 - x - k = 0 \cdots \cdots ③$$

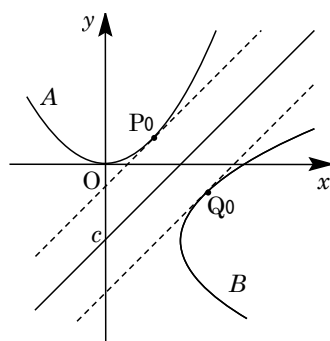
$$\text{判別式 } D = 1 + 4k = 0 \text{ より, } k = -\frac{1}{4}$$

$$\text{このとき, 接点は③から } x = \frac{1}{2}, \text{ ①から } y = \frac{1}{4}$$

$$\text{よって, } P_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

点 P_0 と点 Q_0 は対称軸 $y = x - c$ に関して対称なので、線分 PQ の長さの最小値 P_0Q_0 は点 $P_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ と対称軸 $x - y - c = 0$ との距離の 2 倍となるので、

$$P_0Q_0 = 2 \cdot \frac{\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - c\right|}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2} \left|\frac{1}{4} - c\right| = \sqrt{2} \left(c - \frac{1}{4}\right)$$



[解 説]

本問は求値問題ですので、直観に依存した解で記述しています。

3

[1999 東北大・理]

$$y = x^2 \text{ より, } y' = 2x$$

$$\text{点 } (a, a^2) \text{ での接線は, } y = 2a(x - a) + a^2 = 2ax - a^2$$

$$\text{よって, 線分 PQ は, } y = 2ax - a^2 \text{ } (a-1 \leq x \leq a+1) \cdots \cdots \textcircled{1}$$

a が $-1 \leq a \leq 1$ の範囲を動くとき, 線分 PQ の通過領域は, 明らかに y 軸対称となる。

さて, ①において $x = t$ ($t \geq 0$) 上での通過領域を考えると,

$$y = 2at - a^2 = -(a-t)^2 + t^2 \text{ } (t-1 \leq a \leq t+1) \cdots \cdots \textcircled{2}$$

そこで, ②式を $y = f(a)$ とおき, a が $-1 \leq a \leq 1$ と $t-1 \leq a \leq t+1$ との共通範囲を動くとき, y の値のとりうる範囲を求める。

ここで, $y = f(a)$ のグラフの軸が $a = t$ なので, t の値で場合分けをする。

(i) $t > 2$ のとき

$-1 \leq a \leq 1$ と $t-1 \leq a \leq t+1$ との共通範囲は存在しない。

(ii) $1 < t \leq 2$ のとき

$-1 \leq a \leq 1$ と $t-1 \leq a \leq t+1$ との共通範囲は $t-1 \leq a \leq 1$ となる。この範囲には, $y = f(a)$ の軸は存在しないので, $f(a)$ は単調増加となる。

$$f(t-1) \leq y \leq f(1) \text{ より, } t^2 - 1 \leq y \leq 2t - 1$$

(iii) $0 \leq t \leq 1$ のとき

$-1 \leq a \leq 1$ と $t-1 \leq a \leq t+1$ との共通範囲は $t-1 \leq a \leq 1$ となる。この範囲に $y = f(a)$ の軸は存在し, しかも $t-1 < \frac{(t-1)+1}{2} \leq t \leq 1$ なので,

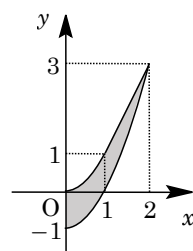
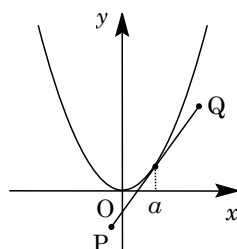
$$f(t-1) \leq y \leq f(t) \text{ より, } t^2 - 1 \leq y \leq t^2$$

(i)~(iii)より, $x \geq 0$ で線分 PQ の通過領域は, 右図のようになる。

求める面積を S とおくと,

$$\begin{aligned} \frac{S}{2} &= \int_0^1 \{x^2 - (x^2 - 1)\} dx + \int_1^2 \{2x - 1 - (x^2 - 1)\} dx \\ &= \int_0^1 dx + \int_1^2 (-x^2 + 2x) dx = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

$$\text{よって, } S = \frac{10}{3}$$



[解 説]

x を固定して丁寧に線分の通過領域を求めました。しかし, 本問では 2 点 P, Q だけの軌跡を求めて, 直観的に考えることも可能です。

4

[2000 東京大・文]

$P = 1 - ax - by - axy$ とおき、まず y の値を固定し、 $y = t$ ($-1 \leq t \leq 1$) において、 P の最小値を求める。

$$P = 1 - ax - bt - axt = -a(1+t)x + 1 - bt$$

$-1 \leq t \leq 1$ のとき、 $1+t \geq 0$ となるので、

(i) $-a \geq 0$ ($a \leq 0$) のとき $x = -1$ で P は最小となる。

$$\text{このとき、} P = a(1+t) + 1 - bt = (a-b)t + a + 1$$

(i-i) $a-b \geq 0$ ($b \leq a$) のとき

$$t = -1 \text{ で最小値 } P = -(a-b) + a + 1 = b + 1 \text{ をとり、条件より、} b + 1 > 0$$

(i-ii) $a-b < 0$ ($b > a$) のとき

$$t = 1 \text{ で最小値 } P = (a-b) + a + 1 = 2a - b + 1 \text{ をとり、条件より、} 2a - b + 1 > 0$$

(ii) $-a < 0$ ($a > 0$) のとき $x = 1$ で P は最小となる。

$$\text{このとき、} P = -a(1+t) + 1 - bt = -(a+b)t - a + 1$$

(ii-i) $a+b \geq 0$ ($b \geq -a$) のとき

$$t = 1 \text{ で最小値 } P = -(a+b) - a + 1 = -2a - b + 1 \text{ をとり、条件より、} -2a - b + 1 > 0$$

(ii-ii) $a+b < 0$ ($b < -a$) のとき

$$t = -1 \text{ で最小値 } P = (a+b) - a + 1 = b + 1 \text{ をとり、条件より、} b + 1 > 0$$

(i)(ii)をまとめると、

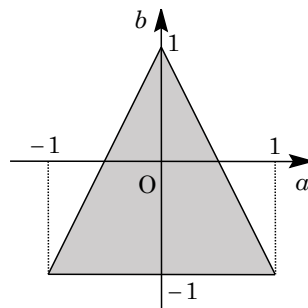
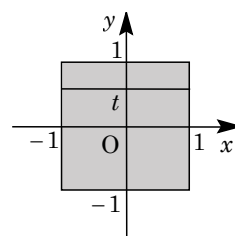
$$a \leq 0 \text{ かつ } b \leq a \text{ のとき、} b > -1$$

$$a \leq 0 \text{ かつ } b > a \text{ のとき、} b < 2a + 1$$

$$a > 0 \text{ かつ } b \geq -a \text{ のとき、} b < -2a + 1$$

$$a > 0 \text{ かつ } b < -a \text{ のとき、} b > -1$$

この条件を満たす点 (a, b) の範囲は右図の網点部になる。ただし、境界は含まない。



[解 説]

今年もまた出ましたという感のある 1 文字固定の最大・最小問題です。しかし、対象が 1 次関数のため、そんなに複雑ではありません。