２０２６ 入試対策

２次数学ランドマーク

整数と数列49題

文系＋理系 28か年

１９９８ － ２０２５

外林 康治　編著

電送数学舎

整数と数列

【問題一覧】

（注）問題番号が，対応する解答例へのハイパーリンクになっています。

1 正の整数 n を 8 で割った余りを $r(n)$ とおく。正の整数の組 $(a,\ b)$ は，条件 $0<a-r(a)<\dfrac{4}{3}r(b)$，$0<b-r(b)<\dfrac{4}{3}r(ab)$ をみたすとする。

(1) $a-r(a)$ と $r(b)$ を求めよ。

(2) a と b を求めよ。 ［1998 一橋大・文］

2 正の整数の組 $(a,\ b)$ で，a 以上 b 以下の整数の総和が 500 となるものをすべて求めよ。ただし，$a<b$ とする。 ［1999 大阪大・文］

3 p,q は素数で，$p<q$ とする。

(1) $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$ を満たす整数 r は存在しないことを示せ。

(2) $\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$ を満たす整数 r が存在するのは，$p=2$，$q=3$ のときに限ることを示せ。 ［1999 一橋大・文］

4 0 以上の整数 x に対して，$C(x)$ で x の下 2 桁を表すことにする。たとえば，$C(12578)=78$，$C(6)=6$ である。n を 2 でも 5 でも割り切れない正の整数とする。

(1) $x,\ y$ が 0 以上の整数のとき，$C(nx)=C(ny)$ ならば，$C(x)=C(y)$ であることを示せ。

(2) $C(nx)=1$ となる 0 以上の整数 x が存在することを示せ。 ［1999 京都大・文］

5 どのような負でない 2 つの整数 m と n を用いても，$x=3m+5n$ とは表すことができない正の整数 x をすべて求めよ。 ［2000 大阪大・理］

6 次の問いに答えよ。

(1) 整数 $n\geqq 3$ に対して，${}_n\mathrm{C}_3=\displaystyle\sum_{k=3}^{n}{}_{k-1}\mathrm{C}_2$ が成り立つことを示せ。

(2) 整数 $k\geqq 3$ に対して，$x+y+z=k$ を満たす自然数 $x,\ y,\ z$ の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数は $\dfrac{1}{2}(k-1)(k-2)$ であることを示せ。

(3) 整数 $m\geqq 0$ に対して，$x+y+z\leqq m$ を満たす負でない整数 $x,\ y,\ z$ の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数を，(1)，(2)を用いて求めよ。 ［2000 金沢大・理］

7 実数 x_1，…，x_n $(n \geqq 3)$ が条件 $x_{k-1} - 2x_k + x_{k+1} > 0$ $(2 \leqq k \leqq n-1)$ を満たすとし，x_1，…，x_n の最小値を m とする。このとき，$x_l = m$ となる $l(1 \leqq l \leqq n)$ の個数は 1 または 2 であることを示せ。 [2000 京都大・文]

8 数列 $\{a_n\}$ において，各項 a_n が $a_n \geqq 0$ をみたし，かつ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2}$ が成り立つとする。さらに各 n に対し

$$b_n = (1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_n),\quad c_n = 1-(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)$$

とおく。

(1) すべての n に対し不等式 $b_n \geqq c_n$ が成り立つことを，数学的帰納法で示せ。

(2) ある n について $b_{n+1} = c_{n+1}$ が成り立てば，$b_n = c_n$ となることを示せ。

(3) $b_3 = \dfrac{1}{2}$ となるとき，$c_3 = \dfrac{1}{2}$ であることを示せ。また $b_3 = \dfrac{1}{2}$ となる数列 $\{a_n\}$ は全部で何種類あるかを求めよ。 [2001 大阪大・理]

9 n を 2 以上の整数とする。実数 a_1，a_2，…，a_n に対し，$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ とおく。$k = 1$，2，…，n について，不等式 $-1 < S - a_k < 1$ が成り立っているとする。

$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n$ のとき，すべての k について $|a_k| < 2$ が成り立つことを示せ。

[2001 京都大・文]

10 4 個の整数 1, a, b, c は $1 < a < b < c$ を満たしている。これらの中から相異なる 2 個を取り出して和を作ると，$1+a$ から $b+c$ までのすべての整数の値が得られるという。a, b, c の値を求めよ。 [2002 京都大・文]

11 p は 3 以上の素数であり，x, y は $0 \leqq x \leqq p$, $0 \leqq y \leqq p$ を満たす整数であるとする。このとき x^2 を $2p$ で割った余りと，y^2 を $2p$ で割った余りが等しければ，$x = y$ であることを示せ。 [2003 京都大・文]

12 素数 p, q に対して，$a_n = p^n - 4(-q)^n$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって整数 a_n を定める。ただし，$p > 2q$ とする。

(1) a_1 と a_2 が 1 より大きい公約数 m をもつならば，$m = 3$ であることを示せ。

(2) a_n がすべて 3 の倍数であるような p, q のうちで積 pq が最小となるものを求めよ。 [2004 大阪大・理]

13 n, a, b を 0 以上の整数とする。a, b を未知数とする方程式

$$(*) \quad a^2 + b^2 = 2^n$$

を考える。

(1) $n \geqq 2$ とする。$a,\ b$ が方程式(＊)を満たすならば，$a,\ b$ はともに偶数であることを証明せよ。（ただし，0 は偶数に含める。）

(2) 0 以上の整数 n に対して，方程式(＊)を満たす 0 以上の整数の組$(a,\ b)$をすべて求めよ。 ［2004 京都大・文］

14 3 以上 9999 以下の奇数 a で，$a^2 - a$ が 10000 で割り切れるものをすべて求めよ。 ［2005 東京大］

15 2 以上の自然数 n に対し，n と $n^2 + 2$ がともに素数になるのは $n = 3$ の場合に限ることを示せ。 ［2006 京都大・理］

16 次の条件を満たす組$(x,\ y,\ z)$を考える。

条件(A)：x, y, z は正の整数で，$x^2 + y^2 + z^2 = xyz$ および $x \leqq y \leqq z$ を満たす。

以下の問いに答えよ。

(1) 条件(A)を満たす組$(x,\ y,\ z)$で，$y \leqq 3$ となるものをすべて求めよ。

(2) 組$(a,\ b,\ c)$が条件(A)を満たすとする。このとき，組$(b,\ c,\ z)$が条件(A)を満たすような z が存在することを示せ。

(3) 条件(A)を満たす組$(x,\ y,\ z)$は，無数に存在することを示せ。 ［2006 東京大・理］

17 p を 3 以上の素数とする。4 個の整数 a, b, c, d が次の 3 条件

$$a + b + c + d = 0,\quad ad - bc + p = 0,\quad a \geqq b \geqq c \geqq d$$

を満たすとき，a, b, c, d を p を用いて表せ。 ［2007 京都大］

18 以下の問いに答えよ。

(1) x を有理数とする。$7x^2$ が整数ならば，x は整数であることを示せ。

(2) $a,\ b$ を整数とする。$a^2 - 7b^2$ が 4 の倍数ならば，a と b はともに偶数であることを示せ。

(3) r は整数，s は有理数とする。$\left(\dfrac{r}{2}\right)^2 - 7s^2$ が整数ならば，s は整数であることを示せ。

［2008 千葉大］

19 p を素数, n を正の整数とするとき，$(p^n)!$ は p で何回割り切れるか。

［2009 京都大・文］

20 t を実数として，数列 a_1，a_2，$\cdots$を

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2t,\ a_{n+1} = 2ta_n - a_{n-1}\quad (n \geqq 2)$$

で定める。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $t \geqq 1$ ならば, $0 < a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ となることを示せ。

(2) $t \leqq -1$ ならば, $0 < |a_1| < |a_2| < |a_3| < \cdots$ となることを示せ。

(3) $-1 < t < 1$ ならば，$t = \cos\theta$ となる θ を用いて，

$$a_n = \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\quad (n \geqq 1)$$

となることを示せ。

［2009 神戸大・理］

21 4 で割ると余りが 1 である自然数全体の集合を A とする。すなわち,

$$A = \{4k+1 \mid k \text{は}0\text{以上の整数}\}$$

とする。次の問いに答えよ。

(1) x および y が A に属するならば，その積 xy も A に属することを証明せよ。

(2) 0 以上の偶数 m に対して，3^m は A に属することを証明せよ。

(3) m, n を 0 以上の整数とする。$m+n$ が偶数ならば 3^m7^n は A に属し，$m+n$ が奇数ならば 3^m7^n は A に属さないことを証明せよ。

(4) m, n を 0 以上の整数とする。$3^{2m+1}7^{2n+1}$ の正の約数のうち A に属する数全体の和を m と n を用いて表せ。

［2010 広島大・理］

22 a, b は $a \geqq b > 0$ を満たす整数とし, x と y の 2 次方程式

$$x^2 + ax + b = 0,\ y^2 + by + a = 0$$

がそれぞれ整数解をもつとする。

(1) $a = b$ とするとき，条件を満たす整数 a をすべて求めよ。

(2) $a > b$ とするとき，条件を満たす整数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。

［2011 名古屋大・理］

23 すべての項が整数である数列を整数列という。p, q, r, s を実数とし，正の整数 n に対し，

$$a_n = p + qn + rn^2,\ b_n = p + qn + rn^2 + sn^3$$

とおく。このとき以下の命題を示せ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ が整数列ならば，$2r$ は整数である。

(2) 数列 $\{b_n\}$ が整数列であるための必要十分条件は，p と $q+r+s$ と $2r$ と $6s$ がいずれも整数となることである。　［2012 千葉大・医］

24 4 個の整数 $n+1$，n^3+3，n^5+5，n^7+7 がすべて素数となるような正の整数 n は存在しない。これを証明せよ。　［2013 大阪大・理］

25 n と k を自然数とし，整式 x^n を整式 $(x-k)(x-k-1)$ で割った余りを $ax+b$ とする。

(1) a と b は整数であることを示せ。

(2) a と b をともに割り切る素数は存在しないことを示せ。　［2013 京都大・文］

26 n を自然数とし，整式 x^n を整式 x^2-2x-1 で割った余りを $ax+b$ とする。このとき a と b は整数であり，さらにそれらをともに割り切る素数は存在しないことを示せ。　［2013 京都大・理］

27 次の問いに答えよ。

(1) 任意の自然数 a に対し，a^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 であることを証明せよ。

(2) 自然数 a, b, c が $a^2+b^2=3c^2$ を満たすと仮定すると，a, b, c はすべて 3 で割り切れなければならないことを証明せよ。

(3) $a^2+b^2=3c^2$ を満たす自然数 a, b, c は存在しないことを証明せよ。［2014 九州大］

28 $a-b-8$ と $b-c-8$ が素数となるような素数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ。

［2014 一橋大・文］

29 r を 0 以上の整数とし，数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$a_1=r,\ a_2=r+1,\ a_{n+2}=a_{n+1}(a_n+1)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

また，素数 p を 1 つとり，a_n を p で割った余りを b_n とする。ただし，0 を p で割った余りは 0 とする。

(1) 自然数 n に対し，b_{n+2} は $b_{n+1}(b_n+1)$ を p で割った余りと一致することを示せ。

(2) $r=2$，$p=17$ の場合に，10 以下のすべての自然数 n に対して，b_n を求めよ。

(3) ある 2 つの相異なる自然数 n, m に対して，

$$b_{n+1}=b_{m+1}>0,\ b_{n+2}=b_{m+2}$$

が成り立ったとする。このとき，$b_n=b_m$ が成り立つことを示せ。

(4) a_2，a_3，a_4，$\cdots$ に p で割り切れる数が現れないとする。このとき，a_1 も p で割り切れないことを示せ。 [2014 東京大・理]

30 以下の問いに答えよ。

(1) n が正の偶数のとき，2^n-1 は 3 の倍数であることを示せ。

(2) n を自然数とする。2^n+1 と 2^n-1 は互いに素であることを示せ。

(3) p, q を異なる素数とする。$2^{p-1}-1=pq^2$ を満たす p, q の組をすべて求めよ。

[2015 九州大・理]

31 数列 $\{p_n\}$ を次のように定める。

$$p_1=1,\ p_2=2,\ p_{n+2}=\frac{{p_{n+1}}^2+1}{p_n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) $\dfrac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_{n+1}p_n}$ が n によらないことを示せ。

(2) すべての $n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$ に対し，$p_{n+1}+p_{n-1}$ を p_n のみを使って表せ。

(3) 数列 $\{q_n\}$ を次のように定める。

$$q_1=1,\ q_2=1,\ q_{n+2}=q_{n+1}+q_n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

すべての $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，$p_n=q_{2n-1}$ を示せ。 [2015 東京大・理]

32 x, y を自然数とする。

(1) $\dfrac{3x}{x^2+2}$ が自然数であるような x をすべて求めよ。

(2) $\dfrac{3x}{x^2+2}+\dfrac{1}{y}$ が自然数であるような組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。 [2016 北海道大・文]

33 以下の問いに答えよ。ただし，(1)については，結論のみを書けばよい。

(1) n を正の整数とし，3^n を 10 で割った余りを a_n とする。a_n を求めよ。

(2) n を正の整数とし，3^n を 4 で割った余りを b_n とする。b_n を求めよ。

(3) 数列 $\{x_n\}$ を次のように定める。

$$x_1 = 1,\quad x_{n+1} = 3^{x_n} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

x_{10} を 10 で割った余りを求めよ。 [2016 東京大・文]

34 自然数 n に対して，10^n を 13 で割った余りを a_n とおく。a_n は 0 から 12 までの整数である。以下の問いに答えよ。

(1) a_{n+1} は $10a_n$ を 13 で割った余りに等しいことを示せ。

(2) a_1，a_2，$\cdots$，a_6 を求めよ。

(3) 以下の 3 条件を満たす自然数 N をすべて求めよ。

(i) N を十進法で表示したとき 6 桁となる。

(ii) N を十進法で表示して，最初と最後の桁の数字を取り除くと 2016 となる。

(iii) N は 13 で割り切れる。 [2016 九州大]

35 以下の問いに答えよ。

(1) 6 以上の整数 n に対して不等式 $2^n > n^2 + 7$ が成り立つことを数学的帰納法により示せ。

(2) 等式 $p^q = q^p + 7$ を満たす素数の組 $(p,\ q)$ をすべて求めよ。 [2016 東北大・理]

36 素数 p, q を用いて，$p^q + q^p$ と表される素数をすべて求めよ。 [2016 京都大・理]

37 $p = 2 + \sqrt{5}$ とおき，自然数 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$a_n = p^n + \left(-\dfrac{1}{p}\right)^n$ と定める。以下の問いに答えよ。ただし設問(1)は結論のみを書けばよい。

(1) a_1，a_2 の値を求めよ。

(2) $n \geqq 2$ とする。積 $a_1 a_n$ を，a_{n+1} と a_{n-1} を用いて表せ。

(3) a_n は自然数であることを示せ。

(4) a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ。 [2017 東京大]

38 整数 a, b は等式 $3^a-2^b=1$ ……①を満たしているとする。

(1) a, b はともに正となることを示せ。

(2) $b>1$ ならば，a は偶数であることを示せ。

(3) ①を満たす整数の組 $(a,\ b)$ をすべてあげよ。 ［2018 東北大・理］

39 次の問いに答えよ。

(1) 2^n-1 が 3 で割り切れるような自然数 n をすべて求めよ。

(2) n^n-1 が 3 で割り切れるような自然数 n をすべて求めよ。 ［2019 信州大・医］

40 正の整数 n の正の平方根 $\sqrt{n}$ は整数ではなく，それを 10 進法で表すと，小数第 1 位は 0 であり，第 2 位は 0 以外の数であるとする。

(1) このような n の中で最小のものを求めよ。

(2) このような n を小さいものから順に並べたときに 10 番目にくるものを求めよ。

［2019 名古屋大・理］

41 p を自然数とする。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=1,\ a_2=p^2,\ a_{n+2}=a_{n+1}-a_n+13\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める。数列 $\{a_n\}$ に平方数でない項が存在することを示せ。 ［2019 一橋大・文］

42 実数 x に対し，x を超えない最大の整数を $[\,x\,]$ で表す。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_k=2^{[\sqrt{k}]}\quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定義する。正の整数 n に対して，$b_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n^2}a_k$ を求めよ。 ［2021 一橋大・文］

43 以下の問いに答えよ。

(1) n が整数のとき，n を 6 で割ったときの余りと n^3 を 6 で割ったときの余りは等しいことを示せ。

(2) 整数 $a,\ b,\ c$ が条件(＊)：$a^3+b^3+c^3=(c+1)^3$ を満たすとき，$a+b$ を 6 で割った余りは 1 であることを示せ。

(3) $1\leqq a\leqq b\leqq c\leqq 10$ を満たす整数の組 $(a,\ b,\ c)$ で，(2)の条件(＊)を満たすものをすべて求めよ。 ［2021 岡山大］

44 m を正の整数とする。座標平面上の点$(x,\ y)$で，xn^3+yn^2 $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$がすべて整数であるようなものは，連立不等式 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x+y \leqq m$ の表す領域に何個あるか答えよ。 ［2021 千葉大・理］

45 n を自然数とする。3 つの整数n^2+2，n^4+2，n^6+2の最大公約数A_nを求めよ。 ［2022 京都大・理］

46 方程式 $(x^3-x)^2(y^3-y)=86400$を満たす整数の組$(x,\ y)$をすべて求めよ。

［2023 東京工業大・理］

47 与えられた自然数a_0に対して，自然数からなる数列a_0，a_1，a_2，$\cdots$を次のように定める。

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{2} & (a_n\text{が偶数のとき})\\ \dfrac{3a_n+1}{2} & (a_n\text{が奇数のとき})\end{cases}$$

次の問いに答えよ。

(1) a_0，a_1，a_2，a_3がすべて奇数であるような最小の自然数a_0を求めよ。

(2) a_0，a_1，$\cdots$，a_{10}がすべて奇数であるような最小の自然数a_0を求めよ。

［2024 京都大・理］

48 正の整数x, y, zを用いて，$N=9z^2=x^6+y^4$と表される正の整数Nの最小値を求めよ。 ［2025 京都大・理］

49 正の整数nに対し，nの正の約数の個数を$d(n)$とする。たとえば，6 の正の約数は 1, 2, 3, 6 の 4 個なので，$d(6)=4$である。また，$f(n)=\dfrac{d(n)}{\sqrt{n}}$とする。

(1) $f(2025)$を求めよ。

(2) 素数pと正の整数kの組で$f(p^k) \leqq f(p^{k+1})$を満たすものを求めよ。

(3) $f(n)$の最大値と，そのときのnを求めよ。 ［2025 一橋大・文］

整数と数列

【解答例と解説】

（注）問題番号が，対応する問題ページへのハイパーリンクになっています。

1 ［1998 一橋大・文］

$0<a-r(a)<\dfrac{4}{3}r(b)$ ………① $0<b-r(b)<\dfrac{4}{3}r(ab)$ ………②とする。

(1) $0\leqq r(b)\leqq 7$ から，$0\leqq \dfrac{4}{3}r(b)\leqq \dfrac{28}{3}<10$

①より，$0<a-r(a)<10$

また，$a-r(a)$ が 8 の倍数となることを考えあわせて，$a-r(a)=8$ ………③

すると，①より $8<\dfrac{4}{3}r(b)$ となり，$6<r(b)$

$0\leqq r(b)\leqq 7$ から，$r(b)=7$

(2) (1)と同様にして，②より，$b-r(b)=8$ ………④，$r(ab)=7$ ………⑤

④より，$b=r(b)+8=15$

⑤より，$r(15a)=7$

よって，$15a=8k+7$ （k は自然数）となり，

$15(a-1)=8(k-1)$

15 と 8 は互いに素より，$a-1$ は 8 の倍数となり, l を整数として,

$a-1=8l$，$a=8l+1$

すなわち，$r(a)=1$

③より，$a=r(a)+8=9$

［解 説］

不等式の処理が難しそうですが，(1)(2)とも誘導が丁寧についているため，見かけほどではありません。なお，(2)の後半の式変形は，不定方程式の解を求める常套手段の一つです。

２ ［1999 大阪大・文］

a 以上 b 以下の整数の総和は $\dfrac{a+b}{2}(b-a+1)$ なので，条件より，

$$\frac{a+b}{2}(b-a+1)=500,\ \ (a+b)(b-a+1)=1000$$

$1\leqq a<b$ より，$2\leqq b-a+1<a+b$ ………(＊)

また，$(b-a+1)+(a+b)=2b+1$ で，和が奇数となることより，$b-a+1$ と $a+b$ の偶奇は一致しない。

以上より，$1000=2^3\cdot 5^3$ なので，(＊)を満たし 1000 を一方が偶数，他方が奇数の 2 つの数の積として表すと，

$$(b-a+1,\ a+b)=(2^3,\ 5^3),\ (5^2,\ 2^3\cdot 5),\ (5,\ 2^3\cdot 5^2)$$

(i) $(b-a+1,\ a+b)=(2^3,\ 5^3)$ のとき

$b-a=7$，$a+b=125$ より，$(a,\ b)=(59,\ 66)$

(ii) $(b-a+1,\ a+b)=(5^2,\ 2^3\cdot 5)$ のとき

$b-a=24$，$a+b=40$ より，$(a,\ b)=(8,\ 32)$

(iii) $(b-a+1,\ a+b)=(5,\ 2^3\cdot 5^2)$ のとき

$b-a=4$，$a+b=200$ より，$(a,\ b)=(98,\ 102)$

［解 説］

1000 の正の約数は，全部で 16 個になりますが，一つ一つチェックしていくのはたいへんです。条件に適する候補を絞ることについては，$a+b$ と $b-a+1$ の和が奇数となることに注目してみました。

3 ［1999 一橋大・文］

(1) $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$より，$\dfrac{p+q}{pq}=\dfrac{1}{r}$，$(p+q)r=pq$ ………①

ここで，$p+q$ と pq が 2 以上の公約数 m をもつとすると，a，b を自然数として，$p+q=ma$，$pq=mb$ と表される。すると，この式をまとめて $p(ma-p)=mb$ より $p^2=m(ap-b)$，$q(ma-q)=mb$ より $q^2=m(aq-b)$ となり，p^2 と q^2 は 2 以上の公約数 m をもつ。これは，p，q が素数ということに反する。よって，$p+q$ と pq は互いに素である。

すると，①より r が pq の倍数となるので，k を整数として $r=kpq$ と表せる。

①に代入して $(p+q)k=1$ ………②

p，q は $p<q$ を満たす素数なので，$p+q\geqq 2+3=5$ となり，②を満たす整数 k は存在しない。

よって，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$ を満たす整数 r は存在しない。

(2) $\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$より，$\dfrac{q-p}{pq}=\dfrac{1}{r}$，$(q-p)r=pq$ ………③

(1)と同様にして，$q-p$ と pq は互いに素であるので，③より r が pq の倍数となり，l を整数として $r=lpq$ と表せる。

③に代入して $(q-p)l=1$ ………④

④より $q-p$ は 1 の約数となり，$p<q$ より $q-p=1$

これより，p，q の一方が偶数，他方が奇数となるが，偶数の素数は 2 しかないので，$p=2$，$q=3$ となる。このとき $r=6$ となり適する。

よって，$\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$ を満たす整数 r が存在するのは，$p=2$，$q=3$ のときに限る。

［解 説］

大小関係からとりうる値の範囲を絞り込んでいくことをまず考えました。ところがそれではうまく証明できなかったので，p，q が素数という条件をもとに考え直しました。

$\boxed{4}$ ［1999 京都大・文］

(1) $C(x)$ は x を 100 で割った余りなので，$C(nx)=C(ny)$ より，$nx-ny$ は 100 の倍数となる。すると, k を整数として,

$$n(x-y)=100k$$

n は 2 でも 5 でも割り切れない正の整数なので, n と $100=2^2\cdot 5^2$ は互いに素である。

よって，$x-y$ が 100 の倍数となり，$C(x)=C(y)$ が成立する。

(2) (1)の命題の対偶をとると,

$$C(x)\neq C(y) \text{ ならば，} C(nx)\neq C(ny) \cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$C(x)=r_x$，$C(y)=r_y$ とおくと, p, q を 0 以上の整数として,

$$x=100p+r_x,\quad y=100q+r_y$$

$$nx=100np+nr_x,\quad ny=100nq+nr_y$$

命題①は整数 r_x，r_y （$0\leqq r_x\leqq 99$，$0\leqq r_y\leqq 99$）に対し,

$$r_x\neq r_y \text{ ならば，} C(nr_x)\neq C(nr_y)\cdots\cdots\cdots②$$

すると，命題②より $C(0)$，$C(n)$，$C(2n)$，$C(3n)$, …… , $C(99n)$ はすべて異なり，しかも題意から 0, 1, 2, 3, ……, 99 のいずれかである。

よって，$C(nx)=1$ となる 0 以上の整数 x が存在する。

［解 説］

整数 a, b が互いに素であるとき，$ax+by=1$ を満たす整数 x, y が存在するという定理がありますが，(2)はこの定理の具体的な場合の証明となっています。しかし，上の解の論法は，たとえ(1)の誘導がついたとしても，参考書などで類題を経験しておかないと無理でしょう。