２０２６ 入試対策

２次数学ランドマーク

ベクトル42題

文系＋理系 28か年

１９９８ － ２０２５

外林 康治　編著

電送数学舎

ベクトル

【問題一覧】

（注）問題番号が，対応する解答例へのハイパーリンクになっています。

1 △ABC の 3 辺 BC, CA, AB を $t:1-t$ の比に内分する点をそれぞれ A_1, B_1, C_1 とおき，△$A_1B_1C_1$ の 3 辺 B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 を $t:1-t$ の比に内分する点をそれぞれ A_2, B_2, C_2 とおく。ただし，$0<t<1$ とする。

(1) △$A_2B_2C_2$ の辺 B_2C_2 が△ABC のいずれかの辺と平行となる t の値を求めよ。

(2) (1)のとき，△$A_2B_2C_2$ は△ABC に相似であることを示し，その相似比を求めよ。

［1998 一橋大・文］

2 空間の点 $(10,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径 9 の球面を S_1 とし，点 $(0,\ 10,\ 0)$ を中心とする半径 8 の球面を S_2 とする。S_1 と S_2 に接し原点を通る直線の長さ 1 の方向ベクトル $(a,\ b,\ c)$ $(c\geqq 0)$ をすべて求めよ。 ［1999 東北大・理］

3 点 O を中心とする円を考える。この円の円周上に 3 点 A, B, C があって，

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$$

を満たしている。このとき，三角形 ABC は正三角形であることを証明せよ。

［2000 大阪大・文］

4 円に内接する四角形 ABPC は次の条件(イ), (ロ)を満たすとする。

(イ) 三角形 ABC は正三角形である。

(ロ) AP と BC の交点は線分 BC を $p:1-p$ $(0<p<1)$ の比に内分する。

このときベクトル $\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$, p を用いて表せ。 ［2000 京都大］

5 三角形 ABC において $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{CB}=\vec{b}$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 実数 s, t が $0\leqq s+t\leqq 1$, $s\geqq 0$, $t\geqq 0$ の範囲を動くとき，次の各条件を満たす点 P の存在する範囲をそれぞれ図示せよ。

(a) $\overrightarrow{CP}=s\vec{a}+t(\vec{a}+\vec{b})$

(b) $\overrightarrow{CP}=(2s+t)\vec{a}+(s-t)\vec{b}$

(2) (1)の各場合に，点 P の存在する範囲の面積は三角形 ABC の面積の何倍か。

［2000 神戸大・文］

6 四面体 OABC において，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく。線分 OA, OB, OC, BC, CA, AB の中点をそれぞれ L, M, N, P, Q, R とし，$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{LP}}$，$\vec{q}=\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$，$\vec{r}=\overrightarrow{\mathrm{NR}}$ とおく。

(1) 線分 LP, MQ, NR は 1 点で交わることを示せ。

(2) $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を $\vec{p}$，$\vec{q}$，$\vec{r}$ を用いて表せ。

(3) 直線 LP, MQ, NR が互いに直交するとする。X を $\overrightarrow{\mathrm{AX}}=\overrightarrow{\mathrm{LP}}$ となる空間の点とするとき，四面体 XABC の体積を $|\vec{p}|$，$|\vec{q}|$，$|\vec{r}|$ を用いて表せ。 ［2001 東北大・文］

7 四角形 ABCD は半径 1 の円に内接し，

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=0\,,\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}+2(\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}})=\vec{0}$$

を満たしている。このとき次の問いに答えよ。

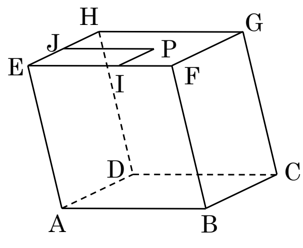
(1) 直線 AC は線分 BD の中点を通ることを示せ。

(2) 四角形 ABCD の 4 辺の各辺の長さを求めよ。 ［2002 千葉大・理］

8 空間内の図形について次の問いに答えよ。

(1) △ABC の面積は，$\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$ に等しいことを示せ。ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ はベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ との内積を表す。必要ならば，2 つのベクトルのなす角のコサインと内積の関係式を用いてよい。

(2) a を正の定数とし，右図の平行六面体 ABCD-EFGH を考える。$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|=2a$ とし，$\angle\mathrm{FBC}=\angle\mathrm{BCD}=90^\circ$，$\angle\mathrm{EAB}=120^\circ$ とする。面 EFGH 上に点 P をとり，点 P から辺 EF 上に垂線 PI を下ろし，点 P から辺 EH 上に垂線 PJ を下ろす。$x=|\overrightarrow{\mathrm{EI}}|$，$y=|\overrightarrow{\mathrm{EJ}}|$ とするとき，△ACP の面積を a，x，y を用いて表せ。



(平行六面体ABCD-EFGH)

(3) 問(2)で点 P が面 EFGH 上を動くとき，△ACP の面積の最小値を求めよ。

［2002 九州大・文］

9 四面体 OABC は次の 2 つの条件

(i) OA ⊥ BC，OB ⊥ AC，OC ⊥ AB

(ii) 4 つの面の面積がすべて等しい

を満たしている。このとき，この四面体は正四面体であることを示せ。 ［2003 京都大］

$\boxed{10}$　座標空間内の三角柱

$$0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ x \geqq y,\ 0 \leqq z \leqq 1$$

を考え，その xy 平面内の面を S, xz 平面内の面を T とする。点 $\mathrm{A}(a,\ b,\ 0)$ を S 内に，点 $\mathrm{B}(c,\ 0,\ d)$ を T 内にとり，また $\mathrm{C}(1,\ 1,\ 1)$ とする。ただし，点 A, B は原点 O とは異なるとする。

(1)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ に直交する単位ベクトルを求め，その単位ベクトルとベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積の絶対値を求めよ。

(2)　四面体 OABC の体積を求めよ。ただし，点 O, A, B, C は同一平面上にないとする。

(3)　点 A が S 内を，点 B が T 内を動くとする。このときの，四面体 OABC の体積の最大値，および最大値を与える点 A, B の位置をすべて求めよ。　［2004 九州大・理］

$\boxed{11}$　空間内の 4 点 A, B, C, D が

$$\mathrm{AB}=1,\ \mathrm{AC}=2,\ \mathrm{AD}=3,\ \angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{CAD}=60^\circ,\ \angle\mathrm{DAB}=90^\circ$$

を満たしている。この 4 点から等距離にある点を E とする。線分 AE の長さを求めよ。

［2005 大阪大・理］

$\boxed{12}$　$\triangle$ABC に対し，辺 AB 上に点 P を，辺 BC 上に点 Q を，辺 CA 上に点 R を，頂点とは異なるようにとる。この 3 点がそれぞれの辺上を動くとき，この 3 点を頂点とする三角形の重心はどのような範囲を動くか図示せよ。　［2006 京都大・理］

$\boxed{13}$　大きさがそれぞれ 5, 3, 1 の平面上のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ に対して，$\vec{z}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ とおく。

(1)　$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を動かすとき，$|\vec{z}|$ の最大値と最小値を求めよ。

(2)　$\vec{a}$ を固定し，$\vec{a}\cdot\vec{z}=20$ を満たすように $\vec{b}$, $\vec{c}$ を動かすとき，$|\vec{z}|$ の最大値と最小値を求めよ。　［2006 一橋大・文］

14　xy 平面において，原点 O を通る半径 r $(r>0)$ の円を C とし，その中心を A とする。O を除く C 上の点 P に対し，次の 2 つの条件(a), (b)で定まる点 Q を考える。

(a)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の向きが同じ

(b)　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=1$

以下の問いに答えよ。

(1)　点 P が O を除く C 上を動くとき，点 Q は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に直交する直線上を動くことを示せ。

(2)　(1)の直線を l とする。l が C と 2 点で交わるとき，r のとりうる値の範囲を求めよ。　［2007 大阪大］

15　a，b を正の数とし，空間内の 3 点 $\mathrm{A}(a,\ -a,\ b)$，$\mathrm{B}(-a,\ a,\ b)$，$\mathrm{C}(a,\ a,\ -b)$ を考える。A, B, C を通る平面を α，原点 O を中心とし A, B, C を通る球面を S とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　線分 AB の中点を D とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{DC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{DO}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であることを示せ。また△ABC の面積を求めよ。

(2)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DO}}$ のなす角を θ とするとき $\sin\theta$ を求めよ。また，平面 α に垂直で原点 O を通る直線と平面 α との交点を H とするとき，線分 OH の長さを求めよ。

(3)　点 P が球面 S 上を動くとき，四面体 ABCP の体積の最大値を求めよ。ただし，P は平面 α 上にはないものとする。　［2007 九州大・理］

16　点 O で交わる 2 つの半直線 OX, OY があって $\angle\mathrm{XOY}=60^\circ$ とする。2 点 A, B が OX 上に O, A, B の順に，また，2 点 C, D が OY 上に O, C, D の順に並んでいるとして，線分 AC の中点を M，線分 BD の中点を N とする。線分 AB の長さを s，線分 CD の長さを t とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　線分 MN の長さを s と t を用いて表せ。

(2)　点 A，B と C，D が，$s^2+t^2=1$ を満たしながら動くとき，線分 MN の長さの最大値を求めよ。　［2008 大阪大］

17　平面上の三角形 OAB を考え，辺 AB の中点を M とする。$\vec{a}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}$，$\vec{b}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}$ とおき，点 P を $\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}>0$ であるようにとる。直線 OP に A から下ろした垂線と直線 OP の交点を Q とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$ と $\vec{b}$ は平行であることを示せ。

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{MQ}}|=\dfrac{1}{2}(|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|)$ であることを示せ。　［2009 大阪大・理］

18　座標平面上に点O$(0,\ 0)$と点P$(4,\ 3)$をとる。不等式$(x-5)^2+(y-10)^2 \leqq 16$の表す領域を$D$とする。次の問いに答えよ。

(1)　k は定数とする。直線$y=-\dfrac{4}{3}x+k$上の点を Q とするとき，ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$の内積$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$を$k$を用いて表せ。

(2)　点 R がD全体を動くとき，ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$の内積$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}$の最大値および最小値を求めよ。　　［2010 広島大・文］

19　四面体ABCDにおいて，辺ABの中点をM，辺CDの中点をNとする。以下の問いに答えよ。

(1)　等式$\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}$を満たす点Pは存在するか。証明をつけて答えよ。

(2)　点 Q が等式$|\overrightarrow{\mathrm{QA}}+\overrightarrow{\mathrm{QB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{QC}}+\overrightarrow{\mathrm{QD}}|$を満たしながら動くとき，点 Q が描く図形を求めよ。

(3)　点 R が等式$|\overrightarrow{\mathrm{RA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{RB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{RC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{RD}}|^2$を満たしながら動くとき，内積$\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MR}}$はRのとり方によらず一定であることを示せ。

(4)　(2)の点 Q が描く図形と(3)の点 R が描く図形が一致するための必要十分条件は$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|$であることを示せ。　　［2010 東北大］

20　三角形ABCの外心をO，重心をG，内心をIとする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$が成り立つならば，三角形ABCは直角三角形であることを証明せよ。

(2)　kが$k\neq\dfrac{1}{3}$を満たす実数で，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$が成り立つならば，三角形ABCは二等辺三角形であることを証明せよ。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$が成り立つならば，三角形 ABC は二等辺三角形であることを証明せよ。　　［2011 千葉大・理］

21　平面上のベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$が，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{1}{2}$を満たすとする。ただし，記号$\vec{a}\cdot\vec{b}$は$\vec{a}$と$\vec{b}$の内積を表す。以下の問いに答えよ。

(1)　実数 p, q に対して，$\vec{c}=p\vec{a}+q\vec{b}$とおく。このとき，次の条件$|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$，$p>0$を満たす実数$p, q$を求めよ。

(2)　平面上のベクトル$\vec{x}$が，$-1\leqq\vec{a}\cdot\vec{x}\leqq1$，$1\leqq\vec{b}\cdot\vec{x}\leqq2$を満たすとき，$|\vec{x}|$のとりうる値の範囲を求めよ。　　［2012 東北大・文］

$\boxed{22}$ xyz 空間内の平面 $z=2$ 上に点 P があり，平面 $z=1$ 上に点 Q がある。直線 PQ と xy 平面の交点を R とする。

(1)　P(0, 0, 2) とする。点 Q が平面 $z=1$ 上で点 (0, 0, 1) を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，点 R の軌跡の方程式を求めよ。

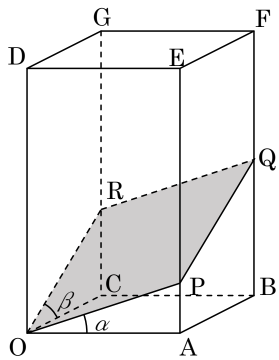
(2)　平面 $z=1$ 上に，4 点 A(1, 1, 1)，B(1, -1, 1)，C(-1, -1, 1)，D(-1, 1, 1) をとる。点 P が平面 $z=2$ で点 (0, 0, 2) を中心とする半径 1 の円周上を動き，点 Q が正方形 ABCD 上を動くとき，点 R が動きうる領域を xy 平面上に図示し，その面積を求めよ。

［2012 一橋大・文］

$\boxed{23}$ t を正の定数とする。原点を O とする空間内に，2 点 A($2t$, $2t$, 0)，B(0, 0, t) がある。また動点 P は，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=3$ を満たすように動く。OP の最大値が 3 となるような t の値を求めよ。

［2013 一橋大・文］

$\boxed{24}$ 1 辺の長さが 1 の正方形を底面とする四角柱 OABC - DEFG を考える。3 点 P, Q, R を，それぞれ辺 AE, 辺 BF, 辺 CG 上に，4 点 O, P, Q, R が同一平面上にあるようにとる。四角形 OPQR の面積を S とおく。また，$\angle$AOP を α，$\angle$COR を β とおく。



(1)　S を $\tan\alpha$ と $\tan\beta$ を用いて表せ。

(2)　$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$，$S=\dfrac{7}{6}$ であるとき，$\tan\alpha+\tan\beta$ の値を求めよ。さらに，$\alpha\leqq\beta$ のとき，$\tan\alpha$ の値を求めよ。

［2014 東京大・理］

$\boxed{25}$ 平面において，一直線上にない 3 点 O, A, B がある。O を通り直線 OA と垂直な直線上に O と異なる点 P をとる。O を通り直線 OB と垂直な直線上に O と異なる点 Q をとる。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直であるとする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を示せ。

(2)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角を α とする。ただし，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ とする。このときベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角が $\pi-\alpha$ であることを示せ。

(3)　$\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}=\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}$ を示せ。

［2015 北海道大・文］

26 xyz 空間において，原点を中心とする xy 平面上の半径 1 の円周上を点 P が動き，点 $(0,\ 0,\ \sqrt{3})$ を中心とする xz 平面上の半径 1 の円周上を点 Q が動く。

(1) 線分 PQ の長さの最小値と，そのときの点 P, Q の座標を求めよ。

(2) 線分 PQ の長さの最大値と，そのときの点 P, Q の座標を求めよ。

［2015 一橋大・文］

27 xyz 空間の中で，$(0,\ 0,\ 1)$ を中心とする半径 1 の球面 S を考える。点 Q が $(0,\ 0,\ 2)$ 以外の S 上の点を動くとき，点 Q と点 $\mathrm{P}(1,\ 0,\ 2)$ の 2 点を通る直線 l と平面 $z=0$ との交点を R とおく。R の動く範囲を求め，図示せよ。［2015 京都大・文］

28 $\triangle\mathrm{ABC}$ が，$\mathrm{AB}=2$，$\mathrm{AC}=1+\sqrt{3}$，$\angle\mathrm{ACB}=45^\circ$ を満たすとする。

(1) $\beta=\angle\mathrm{ABC}$ とおくとき，$\sin\beta$ および $\cos 2\beta$ の値を求めよ。

(2) (1)の β の値をすべて求めよ。

(3) $\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の中心を O とする。$\triangle\mathrm{ABC}$ が鋭角三角形であるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たす実数 $s,\ t$ を求めよ。［2016 北海道大・文］

29 1 辺の長さが 1 の正六角形 ABCDEF が与えられている。点 P が辺 AB 上を，点 Q が辺 CD 上をそれぞれ独立に動くとき，線分 PQ を $2:1$ に内分する点 R が通りうる範囲の面積を求めよ。［2017 東京大・文］

30 正方形 ABCD の辺を除く内部に，$\mathrm{PA}\perp\mathrm{PB}$ を満たす点 P がある。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ を $x\overrightarrow{\mathrm{PA}}+y\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ と表すとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\alpha=\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}$ とするとき，$x,\ y$ を α を用いて表せ。

(2) 点 P が題意の条件を満たしながら動くとき，(1)で求めた $x,\ y$ の和 $x+y$ の最大値を求め，そのときの P がどのような点かを答えよ。［2018 千葉大・理］

31 四面体 ABCD は $\mathrm{AC}=\mathrm{BD}$，$\mathrm{AD}=\mathrm{BC}$ を満たすとし，辺 AB の中点を P，辺 CD の中点を Q とする。

(1) 辺 AB と線分 PQ は垂直であることを示せ。

(2) 線分 PQ を含む平面 α で四面体 ABCD を切って 2 つの部分に分ける。このとき，2 つの部分の体積は等しいことを示せ。［2018 京都大］

32　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=2$ を満たす△PAB を考え，辺 AB の中点を M，△PAB の重心を G とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2$ を内積 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ を用いて表せ。

(2)　$\angle\mathrm{AGB}=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ の値を求めよ。

(3)　点 A と点 B を固定し，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\dfrac{5}{4}$ を満たすように点 P を動かすとき，$\angle\mathrm{ABG}$ の最大値を求めよ。ただし，$0<\angle\mathrm{ABG}<\pi$ とする。　［2019 神戸大］

33　空間内に $\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形 ABC と平面 P がある。点 A は P 上にあり，点 B と点 C は P 上にはなく，P に関して同じ側に位置している。点 B, C から P に下ろした垂線と P との交点をそれぞれ B$'$，C$'$ とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}+\overrightarrow{\mathrm{B'B}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{C'C}}=0$ を示せ。

(2)　$\angle\mathrm{B'AC'}>\dfrac{\pi}{2}$ を示せ。

(3)　P 上の三角形 AB$'$C$'$ の辺の長さは短いものから 4，$\sqrt{21}$，7 であった。このとき，辺 AB の長さを求めよ。　［2019 名古屋大・理］

34　座標空間内の 2 つの球面

$$S_1:(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=7 \text{ と } S_2:(x-2)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=1$$

を考える。S_1 と S_2 の共通部分を C とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　S_1 との共通部分が C となるような球面のうち，半径が最小となる球面の方程式を求めよ。

(2)　S_1 との共通部分が C となるような球面のうち，半径が $\sqrt{3}$ となる球面の方程式を求めよ。　［2019 大阪大］

35　k を正の実数とする。座標空間において，原点 O を中心とする半径 1 の球面上の 4 点 A, B, C, D が次の関係式を満たしている。

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{2},\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\frac{\sqrt{6}}{4},\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=k$$

このとき，k の値を求めよ。ただし，座標空間の点 X，Y に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OY}}$ は，$\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OY}}$ の内積を表す。　［2020 京都大］

36 座標空間に 5 点 O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(3,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 3,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 4)$，P$(0,\ 0,\ -2)$ をとる。さらに $0<a<3$，$0<b<3$ に対して 2 点 Q$(a,\ 0,\ 0)$ と R$(0,\ b,\ 0)$ を考える。

(1) 点 P, Q, R を通る平面を H とする。平面 H と線分 AC の交点 T の座標, および平面 H と線分 BC の交点 S の座標を求めよ。

(2) 点 Q, R, S, T が同一円周上にあるための必要十分条件を a, b を用いて表し, それを満たす点$(a,\ b)$ の範囲を座標平面に図示せよ。 [2020 東京工業大・理]

37 平面上の△ABC で AB$=4$，BC$=5$，AC$=3$ となるものを考え, △ABC の外接円の中心を O とする。また, 辺 AC を$1:5$に内分する点を P とする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) $\cos\angle$ABC と $\cos\angle$AOC の値をそれぞれ求めよ。

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ と $\cos\angle$POC の値をそれぞれ求めよ。

(3) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の値を求めよ。

(4) 点 B と点 P を通る直線が△ABC の外接円と交わる点で B と異なる点を Q とする。$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を用いて表せ。 [2021 金沢大・文]

38 座標空間において, 平面 $z=2$ 上の点 P と, 平面 $z=1$ 上の円板

$$B: x^2+y^2 \leqq 1,\ z=1$$

を考える。点 Q は平面 $z=0$ (xy 平面)上にあるとし, 与えられた P に対して, 線分 PQ と B が共有点をもつような Q 全体からなる図形を D とする。次の問いに答えよ。

(1) P の座標が$(0,\ 0,\ 2)$ であるとき, D を xy 平面上に図示せよ。

(2) r を正の定数とする。P の座標が$(r,\ 0,\ 2)$ であるとき D を xy 平面上に図示せよ。

(3) $r>2$ を満たす定数 r に対して, 平面 $z=2$ 上の円 $C: x^2+y^2=r^2,\ z=2$ を考える。P が C 上を動くとき, D が通過する部分の面積を求めよ。 [2023 金沢大・理]

39 座標空間の 2 点 A$(1,\ -1,\ 1)$，B$(1,\ -1,\ 5)$ を直径の両端とする球面を S とする。次の問いに答えよ。

(1) 球面 S の中心 C の座標と, S の方程式を求めよ。

(2) 点 P が S 上を動くとき, △ABP の面積の最大値を求めよ。

(3) 点 Q$(x,\ y,\ z)$ が $\angle\mathrm{QCA}=\dfrac{\pi}{3}$ かつ $y\geqq 0$ を満たしながら S 上を動く。点 R$(1+\sqrt{2},\ 0,\ 4)$ に対して, 内積 $\overrightarrow{\mathrm{CQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CR}}$ のとりうる値の範囲を求めよ。

[2023 新潟大・医]

40 平面上に三角形 ABC を考え，その重心を G とする。以下の問いに答えよ。

(1) 等式 $\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}=\vec{0}$ が成り立つことを示せ。

(2) 平面上の任意の点 P に対して，次の等式が成り立つことを示せ。

$$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2=3|\overrightarrow{\mathrm{PG}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GC}}|^2$$

(3) 次の等式が成り立つことを示せ。

$$|\overrightarrow{\mathrm{GA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GC}}|^2=\frac{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2}{3}$$

(4) 三角形 ABC の外接円の半径を R とするとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$R^2 \geqq \frac{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2}{9}$$

［2024 岡山大・文］

41 座標空間の 4 点 O, A, B, C は同一平面上にないとする。線分 OA の中点を P，線分 AB の中点を Q とする。実数 x, y に対して，直線 OC 上の点 X と，直線 BC 上の点 Y を次のように定める。

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=x\overrightarrow{\mathrm{OC}},\quad \overrightarrow{\mathrm{BY}}=y\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

このとき，直線 QY と直線 PX がねじれの位置にあるための x, y に関する必要十分条件を求めよ。

［2024 京都大・理］

42 S を xyz 空間内の原点 O$(0,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径 1 の球面とする。また，点 P$(a,\ b,\ c)$ を点 N$(0,\ 0,\ 1)$ とは異なる球面 S 上の点とする。点 P と点 N を通る直線 l と xy 平面との交点を Q とおく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 点 Q の座標を a, b, c を用いて表せ。

(2) xy 平面上の点 $(p,\ q,\ 0)$ と点 N を通る直線を m とする。直線 m と球面 S の交点のうち，点 N 以外の交点の座標を p, q を用いて表せ。

(3) 点 $\left(0,\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$ を通り，ベクトル $(3,\ 4,\ 5)$ に直交する平面 α を考える。点 P が平面 α と球面 S との交わりを動くとき，点 Q は xy 平面上の円周上を動くことを示せ。

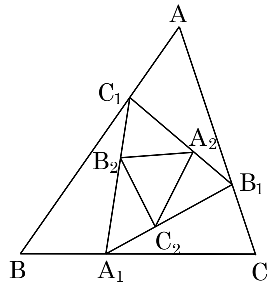
［2025 東北大・理］

ベ ク ト ル

【解答例と解説】

（注）問題番号が，対応する問題ページへのハイパーリンクになっています。

1 [1998 一橋大・文]



(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とする。

$$\overrightarrow{\mathrm{AB_2}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC_1}}+t\overrightarrow{\mathrm{AA_1}}$$
$$=(1-t)t\vec{b}+t\left\{(1-t)\vec{b}+t\vec{c}\right\}$$
$$=2t(1-t)\vec{b}+t^2\vec{c}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AC_2}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AA_1}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB_1}}$$
$$=(1-t)\left\{(1-t)\vec{b}+t\vec{c}\right\}+t(1-t)\vec{c}$$
$$=(1-t)^2\vec{b}+2t(1-t)\vec{c}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{B_2C_2}}=\overrightarrow{\mathrm{AC_2}}-\overrightarrow{\mathrm{AB_2}}=(3t^2-4t+1)\vec{b}-(3t^2-2t)\vec{c}$$

(i) $\mathrm{B_2C_2} /\!/ \mathrm{AC}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{B_2C_2}}$ は $\vec{c}$ の実数倍より $3t^2-4t+1=0$，よって $t=\dfrac{1}{3}$

(ii) $\mathrm{B_2C_2} /\!/ \mathrm{AB}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{B_2C_2}}$ は $\vec{b}$ の実数倍より $3t^2-2t=0$，よって $t=\dfrac{2}{3}$

(iii) $\mathrm{B_2C_2} /\!/ \mathrm{BC}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{B_2C_2}}$ は $\vec{b}-\vec{c}$ の実数倍より $3t^2-4t+1=3t^2-2t$，よって $t=\dfrac{1}{2}$

(2) (1)と同様にして，

$$\overrightarrow{\mathrm{AA_2}}=t\overrightarrow{\mathrm{AC_1}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB_1}}=t^2\vec{b}+(1-t)^2\vec{c}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{C_2A_2}}=\overrightarrow{\mathrm{AA_2}}-\overrightarrow{\mathrm{AC_2}}=(2t-1)\vec{b}-(3t^2-4t+1)\vec{c}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{A_2B_2}}=\overrightarrow{\mathrm{AB_2}}-\overrightarrow{\mathrm{AA_2}}=(2t-3t^2)\vec{b}+(2t-1)\vec{c}$$

(i) $t=\dfrac{1}{3}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{B_2C_2}}=\dfrac{1}{3}\vec{c}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{C_2A_2}}=-\dfrac{1}{3}\vec{b}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BA}}$,

$\overrightarrow{\mathrm{A_2B_2}}=\dfrac{1}{3}\vec{b}-\dfrac{1}{3}\vec{c}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ より，$\triangle\mathrm{A_2B_2C_2}\backsim\triangle\mathrm{BCA}$ で，相似比は$1:3$

(ii) $t=\dfrac{2}{3}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{B_2C_2}}=-\dfrac{1}{3}\vec{b}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{C_2A_2}}=\dfrac{1}{3}\vec{b}-\dfrac{1}{3}\vec{c}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{CB}}$,

$\overrightarrow{\mathrm{A_2B_2}}=\dfrac{1}{3}\vec{c}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より，$\triangle\mathrm{A_2B_2C_2}\backsim\triangle\mathrm{CAB}$ で，相似比は$1:3$

(iii) $t=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{B_2C_2}}=-\dfrac{1}{4}\vec{b}+\dfrac{1}{4}\vec{c}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{C_2A_2}}=-\dfrac{1}{4}\vec{c}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{CA}}$,

$\overrightarrow{\mathrm{A_2B_2}}=\dfrac{1}{4}\vec{b}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より，$\triangle\mathrm{A_2B_2C_2}\backsim\triangle\mathrm{ABC}$ で，相似比は$1:4$

［解 説］

よくある構図の頻出問題です。上のように 1 次独立なベクトルを設定するか，または頂点の位置ベクトルを設定して解いていけば，完答できる問題です。

$\boxed{2}$ [1999 東北大・理]

条件より，$S_1 : (x-10)^2 + y^2 + z^2 = 81$ ………①

$S_2 : x^2 + (y-10)^2 + z^2 = 64$ ………②

S_1 と S_2 に接し原点を通る直線は，$(x,\ y,\ z) = t(a,\ b,\ c)$ ………③

ただし，$a^2 + b^2 + c^2 = 1$ ………④

まず③を①に代入して，$(at-10)^2 + (bt)^2 + (ct)^2 = 81$

$(a^2+b^2+c^2)t^2 - 20at + 19 = 0$

④から，$t^2 - 20at + 19 = 0$

①と③が接するので，$D/4 = 100a^2 - 19 = 0$，$a = \pm\dfrac{\sqrt{19}}{10}$ ………⑤

次に③を②に代入して，$(at)^2 + (bt-10)^2 + (ct)^2 = 64$

$(a^2+b^2+c^2)t^2 - 20bt + 36 = 0$

④から，$t^2 - 20bt + 36 = 0$

②と③が接するので，$D/4 = 100b^2 - 36 = 0$，$b = \pm\dfrac{3}{5}$ ………⑥

④⑤⑥より，$\dfrac{19}{100} + \dfrac{9}{25} + c^2 = 1$

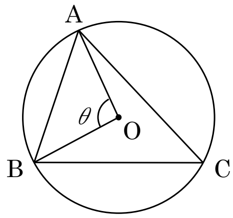
$c \geqq 0$ なので，$c = \dfrac{3\sqrt{5}}{10}$

以上より，$(a,\ b,\ c) = \left(\pm\dfrac{\sqrt{19}}{10},\ \pm\dfrac{3}{5},\ \dfrac{3\sqrt{5}}{10}\right)$（複号任意）

［解 説］

図形的な位置関係を考えてもよいのですが，ここでは代数的に解いてみました。こうすると，数式のもつ威力が感じられます。

3 ［2000 大阪大・文］



$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ より，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2+2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2$$

ここで，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|=R$，$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とおくと，

$$R^2+2R^2\cos\theta+R^2=R^2$$

$$2\cos\theta+1=0,\quad \cos\theta=-\frac{1}{2},\quad \theta=120^\circ$$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ から，$2\cdot\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}=-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と変形をすると，辺 AB の中点と頂点 C は O に関して反対側にあることになり，

$$\angle\mathrm{ACB}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ より，同様にして，$\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{AOC}=60^\circ$

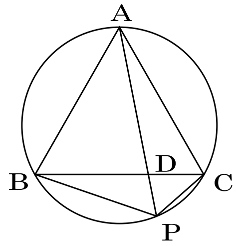
よって，$\angle\mathrm{BAC}=180^\circ-60^\circ-60^\circ=60^\circ$

以上より，$\triangle\mathrm{ABC}$ は正三角形である。

［解 説］

ずいぶん前になりますが, 1992 年に京大で，類題が出ています。

$\boxed{4}$ ［2000 京都大］



対角線 AP と BC の交点を D とすると，条件(ロ)より，$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=p:(1-p)$ なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(1-p)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+p\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

ここで，正三角形 ABC の 1 辺の長さを 1 としても，一般性は失われないので，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=1$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=1\cdot 1\cdot\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2=(1-p)^2|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+2(1-p)p\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+p^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2$$

$$=(1-p)^2+(1-p)p+p^2=1-p+p^2$$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=\sqrt{1-p+p^2}$

ここで，方べきの定理より，$\mathrm{AD}\cdot\mathrm{DP}=\mathrm{BD}\cdot\mathrm{DC}$

$$\mathrm{DP}=\frac{\mathrm{BD}\cdot\mathrm{DC}}{\mathrm{AD}}=\frac{p(1-p)}{\sqrt{1-p+p^2}}$$

すると，$\mathrm{AD}:\mathrm{AP}=\sqrt{1-p+p^2}:\left(\sqrt{1-p+p^2}+\dfrac{p(1-p)}{\sqrt{1-p+p^2}}\right)$

$$=(1-p+p^2):(1-p+p^2+p-p^2)$$

$$=(1-p+p^2):1$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{1-p+p^2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{1-p}{1-p+p^2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{p}{1-p+p^2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

［解 説］

方べきの定理が活躍する構図の設問です。