

2026 入試対策
2次数学ランダムマーク

複素数32題

理系 28か年

1998 — 2025

外林 康治 編著

電送数学舎

複素数

【問題一覧】

(注) 問題番号が，対応する解答例へのハイパーリンクになっています。

- 1 複素平面上で $z_0 = 2(\cos \theta + i \sin \theta)$ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$), $z_1 = \frac{1-\sqrt{3}i}{4}z_0$, $z_2 = -\frac{1}{z_0}$

を表す点をそれぞれ P_0, P_1, P_2 とする。

- (1) z_1 を極形式で表せ。
- (2) z_2 を極形式で表せ。
- (3) 原点 O, P_0, P_1, P_2 の 4 点が同一円周上にあるときの z_0 の値を求めよ。

[1998 岡山大]

- 2 平面上において、7 点 A, P, Q, R, S, R', S' を下図のようにとる。ただし、

$$AP = a, PQ = b$$

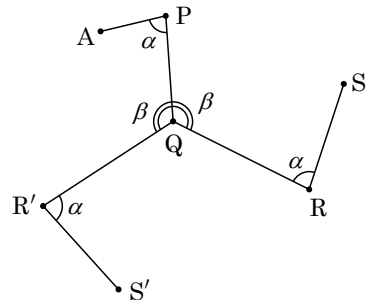
$$QR = QR' = c, RS = R'S' = d$$

$$\angle APQ = \angle SRQ = \angle S'R'Q = \alpha \quad (0 \leq \alpha \leq \pi)$$

$$\angle RQP = \angle PQR' = \beta \quad (0 \leq \beta \leq \pi)$$

である。このとき、 $AS^2 - AS'^2$ を $\sin \alpha, \sin \beta$ および a, b, c, d を用いて表せ。

[1998 大阪大]



- 3 2 つの複素数 α, β が、条件 $\alpha^2 + \beta^2 = -\alpha\beta$, $|\alpha + \beta| = 3$ を満たしているとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\frac{\beta}{\alpha}$ の偏角 θ を求めよ。ただし、 $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ とする。
- (2) α の絶対値を求めよ。
- (3) 複素数平面上で、 $\alpha, \beta, \alpha + \beta, -i\alpha, i\beta$ の表す 5 つの点を頂点とする五角形の面積を求めよ。

[1999 岡山大]

- 4 α, β は $|\alpha + \beta| < 2$ を満たす複素数とする。このとき関数

$$f(x) = \frac{1}{4}|\alpha + \beta|^2 x^2 - (|\alpha| + |\beta|)x + 1$$

の $0 \leq x \leq 1$ における最小値を求めよ。

[2000 東北大]

- 5 複素数 $z = \cos 20^\circ + i \sin 20^\circ$ と、それに共役な複素数 $\bar{z}$ に対し、 $\alpha = z + \bar{z}$ とする。

- (1) α は整数を係数とするある 3 次方程式の解となることを示せ。
- (2) この 3 次方程式は 3 個の実数解をもち、そのいずれも有理数ではないことを示せ。
- (3) 有理数を係数とする 2 次方程式で、 α を解とするものは存在しないことを背理法を用いて示せ。

[2000 九州大]

〔6〕 原点を O とする複素数平面上で、 0 でない複素数 z, w の表す点をそれぞれ $P(z), Q(w)$ とする。 z に対して w を、 O を始点とする半直線 $OP(z)$ 上に $Q(w)$ があり、 $|w| = \frac{2}{|z|}$ を満たすようにとる。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $w = \frac{2}{z}$ を示せ。
- (2) $\pm 2, \pm 2i$ の表す 4 点を頂点とする正方形の周上を点 $P(z)$ が動く。このとき、 $Q(w) = P(z)$ となる z を求めよ。
- (3) $P(z)$ が(2)の正方形の周上を動くとき、点 $Q(w)$ の描く図形を求めて図示せよ。

[2000 岡山大]

〔7〕 複素数平面上の点 z を考える。

- (1) 実数 a, c と複素数 b が $|b|^2 - ac > 0$ を満たすとき、 $az\bar{z} + \bar{b}z + b\bar{z} + c = 0$ を満たす点 z は $a \neq 0$ のとき、どのような図形を描くか。ただし、 $\bar{z}$ は z に共役な複素数を表す。
- (2) 0 でない複素数 d に対して、 $dz(\bar{z}+1) = \bar{d}\bar{z}(z+1)$ を満たす点 z はどのような図形を描くか。

[2001 九州大]

〔8〕 複素数平面上の点 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ を

$$a_1 = 1, a_2 = i, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n=1, 2, \dots)$$

により定め、 $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (n=1, 2, \dots)$ とおく。ただし、 i は虚数単位である。

- (1) 3 点 b_1, b_2, b_3 を通る円 C の中心と半径を求めよ。
- (2) すべての点 $b_n \quad (n=1, 2, \dots)$ は円 C の周上にあることを示せ。

[2001 東京大]

〔9〕 次の問いに答えよ。ただし、偏角 θ は、 $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ の範囲で考えるものとする。

- (1) $|z+i| = |z-i|$ を満たす複素数 z は、実数に限ることを示せ。
- (2) 複素数平面上で z が実軸上を動くとき、複素数 $z+i$ の偏角 $\arg(z+i)$ の動く範囲を求めよ。
- (3) z を未知数とする方程式 $(z+i)^9 = (z-i)^9$ のすべての解 z について $z+i$ の偏角 $\arg(z+i)$ を求めよ。

[2002 名古屋大]

10 a を実数とし, z を複素数とする。複素数平面上で, a, z, z^2, z^3 が表す 4 点があるひし形の 4 頂点になるとする。ただし, a と z^2 が表す頂点是对角線上にあるとする。このような a と z の値をすべて求めよ。 [2003 千葉大]

11 次の問いに答えよ。ただし, i は虚数単位とする。

(1) 複素数 z に対し, $w = \frac{z-i}{z+i}$ とする。 z が実軸上を動くとき, 複素数平面上で w を表す点が描く図形を求めよ。

(2) 複素数 z とその共役複素数 $\bar{z}$ に対し, $w_1 = \frac{z-i}{z+i}, w_2 = \frac{\bar{z}-i}{\bar{z}+i}$ とする。 $z \neq \pm i$ のとき, 複素数平面上で w_1 を表す点を P, w_2 を表す点を Q とする。 P, Q と原点 O が同一直線上にあることを示せ。 [2003 神戸大]

12 O を原点とする複素数平面上で 6 を表す点を $A, 7+7i$ を表す点を B とする。ただし, i は虚数単位である。正の実数 t に対し, $\frac{14(t-3)}{(1-i)t-7}$ を表す点 P をとる。

(1) $\angle APB$ を求めよ。

(2) 線分 OP の長さが最大になる t を求めよ。 [2003 東京大]

13 複素数 α, β は $|\alpha-1|=1, |\beta-i|=1$ を満たす。

(1) $\alpha+\beta$ が存在する範囲を複素数平面上に図示せよ。

(2) $(\alpha-1)(\beta-1)$ が存在する範囲を複素数平面上に図示せよ。 [2003 一橋大]

14 複素数平面上に異なる 3 点 z, z^2, z^3 がある。

(1) z, z^2, z^3 が同一直線上にあるような z をすべて求めよ。

(2) z, z^2, z^3 が二等辺三角形の頂点になるような z の全体を複素数平面上に図示せよ。また, z, z^2, z^3 が正三角形の頂点になるような z をすべて求めよ。

[2004 一橋大]

15 α は絶対値 1 の複素数とし、複素数 z に対して、 $w = \frac{\bar{\alpha}z - 2}{2z - \alpha}$ とおく。ただし $\bar{\alpha}$

は α の共役複素数を表す。

(1) 複素数平面上で、 z が原点と点 α を通る直線上（ただし、点 $\frac{\alpha}{2}$ を除く）を動くとき、

w の表す点は原点と点 $\bar{\alpha}$ を通る直線上にあることを示せ。

(2) 複素数平面上で、 z が不等式 $|z| > 1$ を満たすとき、複素数 w を表す点はどのような図形上を動くか。 [2005 千葉大]

16 t を実数とすると、2 次方程式 $z^2 + tz + t = 0$ について、次の問いに答えよ。

(1) この 2 次方程式が異なる 2 つの虚数解をもつような t の範囲と、そのときの虚数解をすべて求めよ。

(2) (1) の虚数解のうち、その虚部が正のものを $z(t)$ で表す。 t が (1) で求めた範囲を動くとき、複素数平面上で点 $z(t)$ が描く図形 C を求め、図示せよ。

(3) 複素数平面上で、点 z が (2) の図形 C 上を動くとき、 $w = \frac{iz}{z+1}$ で表される点 w が描く図形を求め、図示せよ。 [2005 九州大]

17 α を実数でない複素数とし、 β を正の実数とする。以下の問いに答えよ。ただし、複素数 w に対してその共役複素数を $\bar{w}$ で表す。

(1) 複素数平面上で、関係式 $\alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z = |z|^2$ を満たす複素数 z の描く図形を C とする。このとき、 C は原点を通る円であることを示せ。

(2) 複素数平面上で、 $(z - \alpha)(\beta - \bar{\alpha})$ が純虚数となる複素数 z の描く図形を L とする。 L は (1) で定めた C と 2 つの共有点をもつことを示せ。また、その 2 点を P, Q とするとき、線分 PQ の長さを α と $\bar{\alpha}$ を用いて表せ。

(3) β の表す複素数平面上の点を R とする。(2) で定めた点 P, Q と点 R を頂点とする三角形が正三角形であるとき、 β を α と $\bar{\alpha}$ を用いて表せ。 [2015 筑波大]

18 z を複素数とする。複素数平面上の 3 点 $A(1), B(z), C(z^2)$ が鋭角三角形をなすような z の範囲を求め、図示せよ。 [2016 東京大]

19 α, β, γ を複素数とし、 $\bar{z}z + \alpha z + \beta \bar{z} + \gamma = 0 \cdots \cdots (*)$ を満たす複素数 z を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) z は、 $(\alpha - \bar{\beta})z - (\bar{\alpha} - \beta)\bar{z} + \gamma - \bar{\gamma} = 0$ を満たすことを示せ。
 (2) $|\alpha| = |\beta| \neq 0$ を仮定し、また γ は負の実数であると仮定する。このとき、 $(*)$ を満たす z がちょうど 2 個あるための必要十分条件を α, β を用いて表せ。

[2017 東北大]

20 w を 0 でない複素数、 x, y を $w + \frac{1}{w} = x + yi$ を満たす実数とする。

- (1) 実数 R は $R > 1$ を満たす定数とする。 w が絶対値 R の複素数全体を動くとき、 xy 平面上の点 (x, y) の軌跡を求めよ。
 (2) 実数 α は $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ を満たす定数とする。 w が偏角 α の複素数全体を動くとき、 xy 平面上の点 (x, y) の軌跡を求めよ。

[2017 京都市]

21 複素数平面上の原点以外の点 z に対して、 $w = \frac{1}{z}$ とする。

- (1) α を 0 でない複素数とし、点 α と原点 O を結ぶ線分の垂直二等分線を L とする。点 z が直線 L 上を動くとき、点 w の軌跡は円から 1 点を除いたものになる。この円の中心と半径を求めよ。
 (2) 1 の 3 乗根のうち、虚部が正であるものを β とする。点 β と点 β^2 を結ぶ線分上を点 z が動くときの点 w の軌跡を求め、複素数平面上に図示せよ。

[2017 東京大]

22 複素数平面上に 3 点 O, A, B を頂点とする $\triangle OAB$ がある。ただし、 O は原点とする。 $\triangle OAB$ の外心を P とする。3 点 A, B, P が表す複素数を、それぞれ α, β, z とするとき、 $\alpha\beta = z$ が成り立つとする。

- (1) 複素数 α の満たすべき条件を求め、点 $A(\alpha)$ が描く図形を複素数平面上に図示せよ。
 (2) 点 $P(z)$ の存在範囲を求め、複素数平面上に図示せよ。

[2017 北海道大]

23 α を複素数とする。等式 $\alpha(|z|^2 + 2) + i(2|\alpha|^2 + 1)\bar{z} = 0$ を満たす複素数 z をすべて求めよ。ただし、 i は虚数単位である。

[2018 九州大]

24 複素数平面上で $|z+i| - |z-i| = 1$ を満たす点 z の全体を H とおく。以下の問いに答えよ。ただし、複素数の偏角 θ の範囲は $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

- (1) H の点 z に対して、 z の偏角 θ_1 のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) H の点 z に対して $w = \frac{1}{z}$ とする。 w の絶対値 r_2 と偏角 θ_2 のとりうる値の範囲をそれぞれ求めよ。

[2018 熊本大]

25 複素数 α に対して、複素数平面上の 3 点 $O(0)$, $A(\alpha)$, $B(\alpha^2)$ を考える。次の条件 (I), (II), (III) をすべて満たす複素数 α 全体の集合を S とする。

- (I) α は実数でも純虚数でもない。
- (II) $|\alpha| > 1$ である。
- (III) 三角形 OAB は直角三角形である。

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) α が S に属するとき、 $\angle OAB = \frac{\pi}{2}$ であることを示せ。
- (2) 集合 S を複素数平面上に図示せよ。
- (3) x, y を $\alpha^2 = x + yi$ を満たす実数とする。 α が S を動くとき、 xy 平面上の点 (x, y) の軌跡を求め、図示せよ。

[2018 筑波大]

26 $|z|^2 + 3 = 2(z + \bar{z})$ を満たす複素数 z 全体の集合を A とする。ただし $\bar{z}$ は z の共役複素数である。

- (1) 集合 A を複素数平面上に図示せよ。
- (2) A の要素 z の偏角を θ とする。ただし $-\pi < \theta \leq \pi$ とする。 z が A を動くとき、 θ のとりうる値の範囲を求めよ。
- (3) z^{60} が正の実数となる A の要素 z の個数を求めよ。

[2019 筑波大]

27 i は虚数単位とする。複素数平面において、複素数 z の表す点 P を $P(z)$ または点 z とかく。 $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ とおき、3 点 $A(1)$, $B(\omega)$, $C(\omega^2)$ を頂点とする $\triangle ABC$ を考える。

- (1) $\triangle ABC$ は正三角形であることを示せ。
- (2) 点 z が辺 AC 上を動くとき、点 $-z$ が描く図形を複素数平面上に図示せよ。
- (3) 点 z が辺 AB 上を動くとき、点 z^2 が描く図形を E_1 とする。また、点 z が辺 AC 上を動くとき、点 z^2 が描く図形を E_2 とする。 E_1 と E_2 の共有点をすべて求めよ。

[2021 筑波大]

28 a, b を実数とし, $f(z) = z^2 + az + b$ とする。 a, b が, $|a| \leq 1, |b| \leq 1$ を満たしながら動くとき, $f(z) = 0$ を満たす複素数 z がとりうる値の範囲を複素数平面上に図示せよ。

[2022 東京工業大]

29 以下の問いに答えよ。

(1) 4 次方程式 $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$ を解け。

(2) 複素数平面上の $\triangle ABC$ の頂点を表す複素数をそれぞれ α, β, γ とする。

$(\alpha - \beta)^4 + (\beta - \gamma)^4 + (\gamma - \alpha)^4 = 0$ が成り立つとき, $\triangle ABC$ はどのような三角形になるか答えよ。

[2023 九州大]

30 整数の組 (a, b) に対して 2 次式 $f(x) = x^2 + ax + b$ を考える。方程式 $f(x) = 0$ の複素数の範囲のすべての解 α に対して $\alpha^n = 1$ となる正の整数 n が存在するような組 (a, b) をすべて求めよ。

[2024 東京工業大]

31 定数 α は実数でない複素数とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\frac{\alpha - |\alpha|}{\alpha + |\alpha|}$ は純虚数であることを示せ。

(2) 純虚数 β で, $\frac{\beta - |\alpha|}{\alpha + |\alpha|}$ が純虚数となるものがただ 1 つ存在することを示せ。

(3) 複素数 z を $\frac{z - |\alpha|}{\alpha + |\alpha|}$ が純虚数となるように動かすとき, $|z|$ が最小となる z を α を用いて表せ。

[2024 筑波大]

32 a を正の実数とする。

(1) a が 1 でないとき, 複素数 z についての方程式 $a|z - 1| = |(a - 2)z + a|$ を考える。

この方程式を満たす z 全体の集合を複素数平面上に図示せよ。

(2) 方程式 $|z|^2 = 6 - a, a|z - 1| = |(a - 2)z + a|$ をともに満たす複素数 z が存在するような a の範囲を求めよ。

[2025 北海道大]

複素数

【解答例と解説】

(注) 問題番号が、対応する問題ページへのハイパーリンクになっています。

1

[1998 岡山大]

$$(1) \quad z_1 = \frac{1-\sqrt{3}i}{4} z_0 = \frac{1}{2} \{ \cos(-60^\circ) + i \sin(-60^\circ) \} \cdot 2(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$= \cos(\theta - 60^\circ) + i \sin(\theta - 60^\circ)$$

$$(2) \quad z_2 = -\frac{1}{z_0} = \frac{\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ}{2(\cos \theta + i \sin \theta)} = \frac{1}{2} \{ \cos(180^\circ - \theta) + i \sin(180^\circ - \theta) \}$$

$$(3) \quad 0^\circ < \theta < 90^\circ \text{ より, } \theta - 60^\circ < \theta < 180^\circ - \theta$$

$\angle P_0 O P_1 = \theta - (\theta - 60^\circ) = 60^\circ$ で, $O P_0 = 2$, $O P_1 = 1$ から,

$$\angle O P_1 P_0 = 90^\circ$$

よって, $O P_0$ は円の直径となり, $\angle O P_2 P_0 = 90^\circ$

ここで, $\angle P_0 O P_2 = (180^\circ - \theta) - \theta = 180^\circ - 2\theta$ で, $O P_0 = 2$,

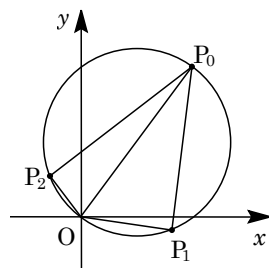
$O P_2 = \frac{1}{2}$ から,

$$\cos(180^\circ - 2\theta) = \frac{O P_2}{O P_0} = \frac{1}{4}$$

$$\text{よって, } \cos 2\theta = -\frac{1}{4}, \quad 2 \cos^2 \theta - 1 = -\frac{1}{4}, \quad \cos \theta = \sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \frac{3}{8}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

$$\text{以上より, } z_0 = 2 \left(\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{10}}{4} i \right) = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{10}}{2} i$$



[解 説]

(3)では, 最初は一般的に 4 点が同一円周上にある条件から求めようと思ったのですが, たいへんな計算が待ち構えていました。そこで, これは何か特別な事情があると推測したところ, やはりその通りでした。この発見がポイントです。

2

[1998 大阪大]

Q を原点とし, QP を実軸の正の部分とする複素数平面を設定する。

また, $z = \cos \alpha + i \sin \alpha$, $w = \cos \beta + i \sin \beta$ とおく。

すると, 点 P を表す複素数は b となり, 点 A を表す複素数は,

$$b + (0 - b) \cdot \frac{a}{b} \{ \cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha) \} = b - a \bar{z}$$

点 R, R' を表す複素数は, それぞれ $c\bar{w}$, cw となる。

点 S を表す複素数は,

$$c\bar{w} + (0 - c\bar{w}) \cdot \frac{d}{c} \{ \cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha) \} = c\bar{w} - d\bar{w}\bar{z} = \bar{w}(c - d\bar{z})$$

点 S' を表す複素数は,

$$cw + (0 - cw) \cdot \frac{d}{c} \{ \cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha) \} = cw - dw\bar{z} = w(c - d\bar{z})$$

ここで $b - a\bar{z} = u$, $c - d\bar{z} = v$ とおくと, $A(u)$, $S(\bar{w}v)$, $S'(wv)$ となる。

$$\begin{aligned} AS^2 - AS'^2 &= |\bar{w}v - u|^2 - |wv - u|^2 \\ &= (\bar{w}v - u)(w\bar{v} - \bar{u}) - (wv - u)(\bar{w}\bar{v} - \bar{u}) \\ &= -\bar{w}\bar{u}v - wu\bar{v} + w\bar{u}v + \bar{w}u\bar{v} = (\bar{u}v - u\bar{v})(w - \bar{w}) \end{aligned}$$

そこで, $\bar{u}v - u\bar{v} = (b - a\bar{z})(c - d\bar{z}) - (b - a\bar{z})(c - dz)$

$$\begin{aligned} &= -bd\bar{z} - acz + bdz + ac\bar{z} \\ &= (bd - ac)(z - \bar{z}) = (bd - ac) \cdot 2i \sin \alpha \end{aligned}$$

また, $w - \bar{w} = 2i \sin \beta$ より,

$$AS^2 - AS'^2 = (bd - ac)(4i^2) \sin \alpha \sin \beta = 4(ac - bd) \sin \alpha \sin \beta$$

[解 説]

いろいろな方針が考えられますが, 上の解では複素数平面を利用してみました。それさえ決まれば, 計算を簡略化するための置き換えを適当に行っていくと, 結論を導くことはさほど困難ではありません。

3

[1999 岡山大]

$$(1) \alpha^2 + \beta^2 = -\alpha\beta \text{ で } \alpha \neq 0 \text{ より, } 1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2} = -\frac{\beta}{\alpha}, \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + \frac{\beta}{\alpha} + 1 = 0$$

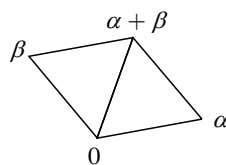
$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \cos(\pm 120^\circ) + i \sin(\pm 120^\circ)$$

$\frac{\beta}{\alpha}$ の偏角 θ は $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ より, $\theta = 120^\circ, 240^\circ$

$$(2) \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| = 1 \text{ より, } \frac{|\beta|}{|\alpha|} = 1, |\alpha| = |\beta|$$

すると, 4 点 $0, \alpha, \alpha + \beta, \beta$ を結ぶ四角形はひし形となり, しかも(1)より, 3 点 $0, \alpha, \alpha + \beta$ を結ぶ三角形は正三角形となる。

条件より $|\alpha + \beta| = 3$ なので, $|\alpha| = |\beta| = 3$

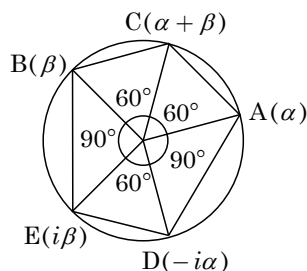


(3) 点 $-i\alpha$ は点 α を原点まわりに -90° 回転した点, 点 $i\beta$ は点 β を原点まわりに 90° 回転した点である。

(i) $\theta = 120^\circ$ のとき

5 点 $\alpha, \beta, \alpha + \beta, -i\alpha, i\beta$ は右図のような位置関係にあり, $\angle BOE = \angle AOD = 90^\circ$, $\angle EOD = 60^\circ$ より, 五角形 ACBED の面積は,

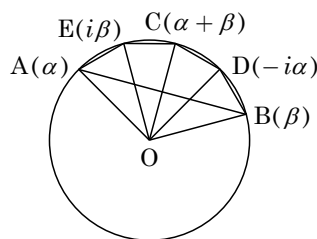
$$\left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \sin 60^\circ\right) \times 3 + \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3\right) \times 2 = 9 + \frac{27}{4}\sqrt{3}$$



(ii) $\theta = 240^\circ$ のとき

5 点 $\alpha, \beta, \alpha + \beta, -i\alpha, i\beta$ は右図のような位置関係にあり, $\angle AOE = \angle COE = \angle COD = \angle BOD = 30^\circ$ より, 五角形 ABDCE の面積は,

$$\left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \sin 30^\circ\right) \times 4 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \sin 120^\circ = 9 - \frac{9}{4}\sqrt{3}$$



[解 説]

複素数と図形に関する頻出問題です。(3)において, 位置関係の異なる 2 つの五角形を考えるのがポイントです。

4

[2000 東北大]

$|\alpha + \beta| = k$ ($0 \leq k < 2$), $|\alpha| + |\beta| = l$ とおくと, $f(x) = \frac{1}{4}k^2x^2 - lx + 1$ となる。

(i) $k = 0$ ($|\alpha + \beta| = 0$) のとき

$f(x) = -lx + 1$ となり, $l \geq 0$ なので, $0 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の最小値は,

$$f(1) = -l + 1 = -|\alpha| - |\beta| + 1$$

(ii) $0 < k < 2$ ($0 < |\alpha + \beta| < 2$) のとき

$$f(x) = \frac{1}{4}k^2 \left(x - \frac{2l}{k^2} \right)^2 - \frac{l^2}{k^2} + 1$$

$$\text{ここで, } \frac{2l}{k^2} - 1 = \frac{1}{k^2}(2l - k^2) = \frac{1}{k^2} \{ 2(|\alpha| + |\beta|) - |\alpha + \beta|^2 \}$$

さて, 複素数 α, β に対して, $|\alpha| + |\beta| \geq |\alpha + \beta|$ が成り立つので,

$$2(|\alpha| + |\beta|) - |\alpha + \beta|^2 \geq 2|\alpha + \beta| - |\alpha + \beta|^2 = 2k - k^2 = -(k-1)^2 + 1$$

$0 < k < 2$ において, $-(k-1)^2 + 1 > 0$ なので, $\frac{2l}{k^2} - 1 > 0$, $\frac{2l}{k^2} > 1$

すると, $0 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の最小値は,

$$f(1) = \frac{1}{4}k^2 - l + 1 = \frac{1}{4}|\alpha + \beta|^2 - |\alpha| - |\beta| + 1$$

(i)(ii)より, $f(x)$ の最小値は, $f(1) = \frac{1}{4}|\alpha + \beta|^2 - |\alpha| - |\beta| + 1$

[解 説]

(ii)の場合をさらに分けて最小値を求めるのでは, 条件の $|\alpha + \beta| < 2$ の意味が不明です。ここは $|\alpha| + |\beta|$ と $|\alpha + \beta|$ の関係がポイントとなりますが, その両者をつなぐのは, どう考えても三角不等式しかありません。なお, 昨年, 東大・理で, この不等式を利用する問題が出ています。