２０２６ 入試対策

２次数学ランドマーク

曲線１９題

理系 28か年

１９９８ － ２０２５

外林 康治　編著

電送数学舎

曲　　線

【問題一覧】

（注）問題番号が，対応する解答例へのハイパーリンクになっています。

1 (1) 点 $P(p,\ q)$ と円 $C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\ \ (r>0)$ との距離 d とは, P と C 上の点 $(x,\ y)$ との距離の最小値をいう。P が C の外部にある場合と内部にある場合に分けて, d を表す式を求めよ。

(2) 2 つの円 $C_1:(x+4)^2+y^2=81$ と $C_2:(x-4)^2+y^2=49$ から等距離にある点 P の軌跡の方程式を求めよ。 [1998 東北大]

2 (1) 平面上に半径が $R,\ r\ (R>r)$ の 2 円があり, それらの中心間の距離が l であるとする。これらの 2 円の円周が共有点をもつための必要十分条件を $R,\ r,\ l$ を用いて表せ。

(2) 座標平面上で x 軸を準線とし, 定点 $A(0,\ a)$ を通る放物線について考える。ただし, $a>0$ とする。

① そのような放物線の焦点 $F(s,\ t)$ の全体はどのような図形を描くか。

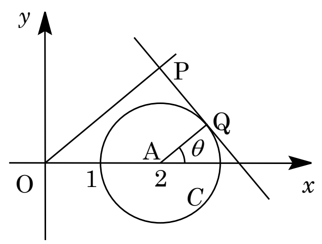
② x 軸上にない点 $P(p,\ q)$ がそのような放物線上の点であるための必要十分条件を求めよ。 [1998 九州大]

3 平面上に 2 定点 A, B をとる。c は正の定数として, 平面上の点 P が

$$|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PB}|+\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=c$$

を満たすとき, 点 P の軌跡を求めよ。 [1999 京都大]

4 xy 平面上において, 点 $A(2,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円を C とする。C 上の点 Q における C の接線に原点 $O(0,\ 0)$ から下ろした垂線の足を P とする。図のように x 軸と線分 AQ のなす角を θ とする。ただし, θ は $-\pi<\theta\leqq\pi$ を動くものとする。

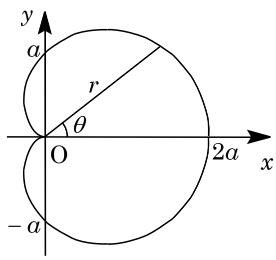


(1) 点 $P(x,\ y)$ の座標 $(x,\ y)$ を θ を用いて表せ。

(2) 点 $P(x,\ y)$ の x 座標が最小になるとき, P の座標 $(x,\ y)$ を求めよ。

(3) 直線 $x=k$ が点 P の軌跡と相異なる 4 点で交わるとき, k のとりうる値の範囲を求めよ。 [1999 筑波大]

5 $a>0$ を定数として，極方程式 $r=a(1+\cos\theta)$ により表される曲線 C_a を考える。次の問いに答えよ。



(1) 極座標が $\left(\dfrac{a}{2},\ 0\right)$ の点を中心とし半径が $\dfrac{a}{2}$ である円 S を，極方程式で表せ。

(2) 点 O と曲線 C_a 上の点 $\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$ とを結ぶ直線が円 S と交わる点を Q とするとき，線分 PQ の長さは一定であることを示せ。

(3) 点 P が曲線 C_a 上を動くとき，極座標が $(2a,\ 0)$ の点と P との距離の最大値を求めよ。

［2000 神戸大］

6 C を双曲線 $2x^2-2y^2=1$ とする。$l,\ m$ を点 $(1,\ 0)$ を通り，x 軸とそれぞれ θ，$\theta+\dfrac{\pi}{4}$ の角をなす 2 直線とする。ここで θ は $\dfrac{\pi}{4}$ の整数倍でないとする。

(1) 直線 l は双曲線 C と相異なる 2 点 P, Q で交わることを示せ。

(2) PQ^2 を，θ を用いて表せ。

(3) 直線 m と曲線 C の交点を R, S とするとき，$\dfrac{1}{\mathrm{PQ}^2}+\dfrac{1}{\mathrm{RS}^2}$ は θ によらない定数となることを示せ。

［2001 筑波大］

7 C を曲線 $a^2x^2+y^2=1$，l を直線 $y=ax+2a$ とする。ただし，a は正の定数である。

(1) C と l とが異なる 2 点で交わるための a の範囲を求めよ。

(2) C 上の点 $(x_0,\ y_0)$ における接線の方程式を求めよ。

(3) (1)における交点を P, Q とし，点 P における C の接線と点 Q における C の接線との交点を $\mathrm{R}(X,\ Y)$ とする。a が(1)の範囲を動くとき，$X,\ Y$ の関係式と Y の範囲を求めよ。

［2002 広島大］

8 θ を $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ である定数とする。座標平面上で，$a^2>4b$ を満たす点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ に引いた 2 つの接線の接点を Q, R とし，接線 PQ, PR の傾きをそれぞれ m_1，m_2 とおく。点 P は $\angle\mathrm{QPR}=\theta$ を満たしている。点 P の全体が作る図形を G とする。

(1) $m_1<0<m_2$ のとき，$\tan\theta$ を m_1 と m_2 で表せ。

(2) G を数式で表せ。

(3) $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき G を図示せよ。 [2003 九州大]

9 楕円 $C:\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ 上の点で，$x\geqq 0$ の範囲にあり，定点 $\mathrm{A}(0,\ -1)$ との距離が最大となる点を P とする。

(1) 点 P の座標と線分 AP の長さを求めよ。

(2) 点 Q は楕円 C 上を動くとする。△APQ の面積が最大となるとき，点 Q の座標および△APQ の面積を求めよ。 [2004 筑波大]

10 実数 a に対して，曲線 C_a を方程式 $(x-a)^2+ay^2=a^2+3a+1$ によって定める。

(1) C_a は a の値と無関係に 4 つの定点を通ることを示し，その 4 定点の座標を求めよ。

(2) a が正の実数全体を動くとき，C_a が通過する範囲を図示せよ。 [2005 筑波大]

11 直線 $y=x$ を l で，直線 $y=-x$ を l' で表す。直線 l，l' のどちらの上にもない点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ をとる。点 A を通る直線 m が 2 直線 l，l' とそれぞれ点 P，P′ で交わるとする。点 Q を，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を満たすようにとる。ただし，O は xy 平面の原点である。直線 m を変化させるとき，点 Q の軌跡は l と l' を漸近線とする双曲線となることを示せ。 [2006 大阪大]

12 d を正の定数とする。2 点 $\mathrm{A}(-d,\ 0)$，$\mathrm{B}(d,\ 0)$ からの距離の和が $4d$ である点 P の軌跡として定まる楕円 E を考える。点 A, 点 B, 原点 O から楕円 E 上の点 P までの距離をそれぞれ AP, BP, OP とかく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 楕円 E の長軸と短軸の長さを求めよ。

(2) $\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2$ および $\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}$ を，OP と d を用いて表せ。

(3) 点 P が楕円 E 全体を動くとき，$\mathrm{AP}^3+\mathrm{BP}^3$ の最大値と最小値を d を用いて表せ。

[2011 筑波大]

13 2 つの双曲線 $C: x^2-y^2=1$，$H: x^2-y^2=-1$ を考える。双曲線 H 上の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ に対して，方程式 $sx-ty=1$ で定まる直線を l とする。

(1) 直線 l は点 P を通らないことを示せ。

(2) 直線 l と双曲線 C は異なる 2 点 Q, R で交わることを示し，△PQR の重心 G の座標を s, t を用いて表せ。

(3) (2)における 3 点 G, Q, R に対して，△GQR の面積は点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ の位置によらず一定であることを示せ。 ［2012 筑波大］

14 楕円 $C: \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ の，直線 $y=mx$ と平行な 2 接線を l_1，l_1' とし，l_1，l_1' に直交する C の 2 接線を l_2，l_2' とする。

(1) l_1，l_1' の方程式を m を用いて表せ。

(2) l_1 と l_1' の距離 d_1 および l_2 と l_2' の距離 d_2 をそれぞれ m を用いて表せ。ただし，平行な 2 直線 l，l' の距離とは，l 上の 1 点と直線 l' の距離である。

(3) $(d_1)^2+(d_2)^2$ は m によらず一定であることを示せ。

(4) l_1，l_1'，l_2，l_2' で囲まれる長方形の面積 S を d_1 を用いて表せ。さらに m が変化するとき，S の最大値を求めよ。 ［2013 筑波大］

15 曲線 $C: x^2+4y^2=4$ 上を動く点 P と，C 上の定点 $\mathrm{Q}(2,\ 0)$，$\mathrm{R}(0,\ 1)$ がある。次の問いに答えよ。

(1) △PQR の面積の最大値と，そのときの P の座標を求めよ。

(2) (1)で求めた点 P に対して直線 PQ を考える。曲線 C によって囲まれた図形を直線 PQ で 2 つに分けたとき，直線 PQ の下方にある部分の面積を求めよ。

［2016 金沢大］

16 3 辺の長さの和が 2 である三角形 ABC において，辺 BC の長さを a，辺 CA の長さを b で表す。三角形 ABC を辺 BC を軸として 1 回転させてできる回転体の体積を V とする。以下の問いに答えよ。

(1) a の値を固定して b の値を変化させたとき，V が最大になるのは，三角形 ABC が辺 BC を底辺とする二等辺三角形となるときである。これを示せ。

(2) a，b の値をともに変化させるとき，V の最大値と，最大値を与える a，b の値をそれぞれ求めよ。 ［2020 大阪大］

$\boxed{17}$ 座標平面において，O(0, 0)，A(4, 0)，P(3, 0) とする。線分 OA に点 P で接する円 C を内接円とする△OAB を考える。ただし，円 C の中心は第 1 象限にあるとする。次の問いに答えよ。

(1) OB と AB の差は一定であることを証明せよ。

(2) 円 C の半径を r とするとき，r のとる値の範囲を求めよ。

(3) r が(2)の範囲で変化するとき，点 B の軌跡の方程式を求めよ。また，その概形をかけ。　［2021 広島大］

$\boxed{18}$ xy 平面上に点 O(0, 0)，A(4, 0) と，円 $C: x^2+y^2=4$ 上を動く点 P$(a,\ b)$ があるとする。各点 P に対して，線分 AP の垂直二等分線を l_{P} とする。以下の問いに答えよ。

(1) 直線 l_{P} の方程式を求めよ。

(2) 直線 OP と l_{P} が平行であるとき，P の座標を求めよ。

(3) 直線 OP と l_{P} が交点をもつとき，交点 Q の軌跡の方程式を求め，さらにその軌跡を図示せよ。　［2025 岡山大］

$\boxed{19}$ xy 平面において 3 点 O(0, 0)，P(1, 0)，Q$(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ を考える。ただし α は $0<\alpha<\pi$ を満たす実数である。また，$f(\theta)=2\cos\theta-1$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) 点 O と直線 PQ の距離を α の式で表せ。

(2) 次の等式を示せ。　$f(\theta)\cos\left(\theta-\dfrac{\alpha}{2}\right)=\cos\dfrac{\alpha}{2}-2\sin\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{3\theta-\alpha}{2}$

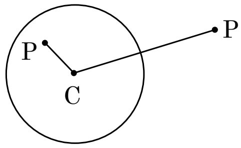
(3) 媒介変数 t を用いて，$x=f(t)\cos t$，$y=f(t)\sin t$ $\left(0<t<\dfrac{\pi}{3}\right)$ と表される曲線を C とする。曲線 C と直線 PQ は 1 点のみを共有することを示せ。また，その共有点を R とするとき，∠POR を α の式で表せ。　［2025 大阪公立大］

曲　　線

【解答例と解説】

（注）問題番号が，対応する問題ページへのハイパーリンクになっています。

1 ［1998 東北大］



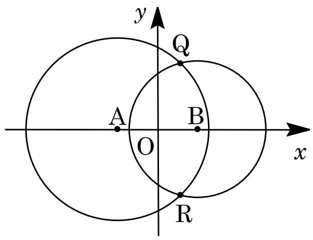
(1) 円 C の中心を $\mathrm{C}(a,\ b)$ とすると，

(i) Pが円 C の外部にあるとき

$$d=\mathrm{PC}-r=\sqrt{(p-a)^2+(q-b)^2}-r$$

(ii) Pが円 C の内部にあるとき

$$d=r-\mathrm{PC}=r-\sqrt{(p-a)^2+(q-b)^2}$$



(2) C_1 の中心を $\mathrm{A}(-4,\ 0)$，C_2 の中心を $\mathrm{B}(4,\ 0)$ とし，C_1 と C_2 の交点を $\mathrm{Q}(2,\ 3\sqrt{5})$，$\mathrm{R}(2,\ -3\sqrt{5})$ とおく。

(i) Pが円 C_1，C_2 の外部にあるとき

$\mathrm{PA}-9=\mathrm{PB}-7$ より $\mathrm{PA}-\mathrm{PB}=2$

Pは2点A, Bを焦点とする双曲線の点Bに近い方の枝である。

その方程式を $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ \ (a^2+b^2=c^2)$ とすると，$2a=2$，$c=4$

$a=1$，$b=\sqrt{15}$ から，$x^2-\dfrac{y^2}{15}=1$

(ii) Pが円 C_1，C_2 の内部にあるとき

$9-\mathrm{PA}=7-\mathrm{PB}$ より $\mathrm{PA}-\mathrm{PB}=2$ なので, (i)と同じく $x^2-\dfrac{y^2}{15}=1$

(iii) Pが円 C_1 の外部, 円 C_2 の内部にあるとき

$\mathrm{PA}-9=7-\mathrm{PB}$ より $\mathrm{PA}+\mathrm{PB}=16$ で, Pは2点A, Bを焦点とする楕円である。

その方程式を $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ \ (a^2-b^2=c^2)$ とすると，$2a=16$，$c=4$

$a=8$，$b=4\sqrt{3}$ から，$\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{48}=1$

(iv) Pが円 C_1 の内部, 円 C_2 の外部にあるとき

$9-\mathrm{PA}=\mathrm{PB}-7$ より $\mathrm{PA}+\mathrm{PB}=16$ なので, (iii)と同じく $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{48}=1$

以上より, Pの軌跡の方程式は，$x^2-\dfrac{y^2}{15}=1\ \ (1\leqq x)$，$\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{48}=1$

［解 説］

今年, 頻出の2次曲線の定義を利用する問題の1つです。おもしろい設定ですので, 丁寧に書いてみました。なお, 2交点Q, Rに点Pが一致したときも条件をみたすのは明らかですので, 軌跡は曲線全体になります。

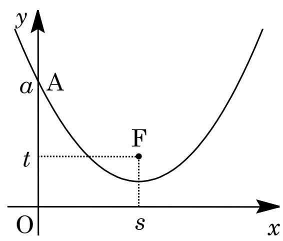
２ ［1998 九州大］

(1) 2 円が共有点をもつ条件は，中心間距離が半径の差以上，半径の和以下より，

$$R-r \leqq l \leqq R+r$$

(2) 放物線は，準線が x 軸で y 軸と正の部分で交わることより x 軸の上方にあり，焦点 $\mathrm{F}(s,\ t)$ から頂点 $\left(s,\ \dfrac{t}{2}\right)$ で，頂点と焦点の距離が $\dfrac{t}{2}$ から，その方程式は，

$$(x-s)^2=4\cdot\frac{t}{2}\left(y-\frac{t}{2}\right)\cdots\cdots\cdots①$$



点 $\mathrm{A}(0,\ a)$ を通るので，$s^2=2t\left(a-\dfrac{t}{2}\right)$

$$s^2+t^2-2at=0$$
$$s^2+(t-a)^2=a^2\cdots\cdots\cdots②$$

よって②から，点 F は中心 $(0,\ a)$，半径 a の円を描く。ただし，$t>0$ より原点を除く。

さて，①が点 $\mathrm{P}(p,\ q)$（$q>0$）を通るとき，$(p-s)^2=4\cdot\dfrac{t}{2}\left(q-\dfrac{t}{2}\right)$ から，

$$(s-p)^2+(t-q)^2=q^2\cdots\cdots\cdots③$$

②は，$s^2+(t-a)^2=a^2$（$t\neq 0$）$\cdots\cdots\cdots④$

ここで，③と④をともにみたす $(s,\ t)$ が存在する $p,\ q$ の関係が求める条件なので，(1)の結果から，

(i) $p\neq 0$ のとき

$|q-a|\leqq\sqrt{p^2+(q-a)^2}\leqq q+a$ より，$(q-a)^2\leqq p^2+(q-a)^2\leqq(q+a)^2$

左側の不等式はつねに成立するので，右側の不等式を変形して，

$$p^2-4aq\leqq 0,\ \ q\geqq\frac{1}{4a}p^2$$

(ii) $p=0$ のとき

③は $s^2+(t-q)^2=q^2$ となり，求める条件は $q=a$

(i)(ii)より，$q\geqq\dfrac{1}{4a}p^2$（$p\neq 0$），$q=a$（$p=0$）

［解 説］

(2)の設問は，一見(1)とは無関係と見えるものの，解のネックとなる部分で(1)の結果を利用します。

3 ［1999 京都大］

△ABP に余弦定理を適用して,

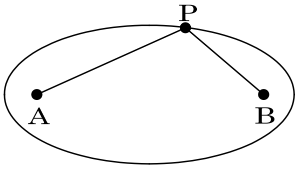
$$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{PA}|^2+|\overrightarrow{PB}|^2-2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$$

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\frac{|\overrightarrow{PA}|^2+|\overrightarrow{PB}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2}{2}\ \cdots\cdots\cdots①$$

なお, ①は 3 点 P, A, B が同一直線上にあるときも成立する。

条件より, $|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PB}|+\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=c\ \cdots\cdots\cdots②$

①を②に代入して,



$$|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PB}|+\frac{|\overrightarrow{PA}|^2+|\overrightarrow{PB}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2}{2}=c$$

$$\left(|\overrightarrow{PA}|+|\overrightarrow{PB}|\right)^2=2c+|\overrightarrow{AB}|^2$$

$$|\overrightarrow{PA}|+|\overrightarrow{PB}|=\sqrt{2c+|\overrightarrow{AB}|^2}\ \cdots\cdots\cdots③$$

$\sqrt{2c+|\overrightarrow{AB}|^2}$ は定数なので, ③より点 P は 2 点 A, B を焦点とする楕円を描く。

長軸の長さは $\sqrt{2c+|\overrightarrow{AB}|^2}$, 短軸の長さは $2\sqrt{\frac{1}{4}\left(2c+|\overrightarrow{AB}|^2\right)-\frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}|^2}=\sqrt{2c}$ となる。

［解 説］

2 点 A, B の中点を原点として座標設定しようかと思いましたが, 条件式②の形に注目して, ベクトルの大きさと内積を余弦定理で関連づけてみました。すると, 楕円の定義式が導けました。