1　　解答解説のページへ

方程式 $\log_a(x-3)=\log_a(x+2)+\log_a(x-1)+1$ が解をもつとき，定数 a のとり得る値の範囲を求めよ。

2

解答解説のページへ

3 つの自然数 p，$p+10$，$p+20$ がすべて素数となるような p がただ 1 つ存在することを示せ。

3

解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$は，すべての項が正であり，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2 = 2n^2 + n$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$を満たすとする。$\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n\sqrt{n}}$ を求めよ。

4

解答解説のページへ

数字の 1 が書かれたカードが 2 枚，2 が書かれたカードが 3 枚，3 が書かれたカードが 4 枚の計 9 枚のカードがある。この 9 枚のカードのすべてを横一列に並べるとき，次の問いに答えよ。

(1) 並べ方は全部で何通りあるか。

(2) 数字の 3 が書かれたカードが隣り合わないような並べ方は何通りあるか。

(3) 同じ数字が書かれたカードが隣り合わないような並べ方は何通りあるか。

5

解答解説のページへ

t を実数とし，座標空間内の 2 点 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ t^2-1)$，$\mathrm{Q}(t,\ 1,\ e^t+e^{-t}-e-e^{-1})$ を考える。t を $-1 \leqq t \leqq 1$ の範囲で動かすとき，線分 PQ が通過してできる曲面および 2 平面 $y=1$，$z=0$ で囲まれてできる立体の体積を求めよ。

$\boxed{1}$

問題のページへ

方程式 $\log_a(x-3)=\log_a(x+2)+\log_a(x-1)+1$ ……①に対し，$a>0$ かつ $a\neq 1$

このとき $x>3$ かつ $x>-2$ かつ $x>1$，すなわち $x>3$ ……②のもとで，①より，

$$\log_a(x-3)=\log_a a(x+2)(x-1),\quad x-3=a(x+2)(x-1)$$

②から $\dfrac{x-3}{(x+2)(x-1)}=a$ ……③となり，$f(x)=\dfrac{x-3}{(x+2)(x-1)}$ とおくと，

$$f'(x)=\frac{(x+2)(x-1)-(x-3)(2x+1)}{(x+2)^2(x-1)^2}$$

$$=-\frac{x^2-6x-1}{(x+2)^2(x-1)^2}$$

②のとき，$f'(x)=0$ の解は $x=3+\sqrt{10}$ であり，$f(x)$ の増減は右表の通りなので，

x	3	$\cdots$	$3+\sqrt{10}$	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

$$f(3+\sqrt{10})=\frac{\sqrt{10}}{(5+\sqrt{10})(2+\sqrt{10})}=\frac{\sqrt{10}}{20+7\sqrt{10}}=\frac{1}{7+2\sqrt{10}}=\frac{7-2\sqrt{10}}{9}$$

すると，$0<\dfrac{7-2\sqrt{10}}{9}<1$ から，③が $x>3$ の解をもつ，すなわち①が解をもつ a のの範囲は，$0<a\leqq\dfrac{7-2\sqrt{10}}{9}$ である。

［解　説］

対数方程式の問題です。いろいろな解き方が考えられますが，解答例では，③のように定数分離する方法を採用しました。

© 電送数学舎 2023

$\boxed{2}$

問題のページへ

自然数pが素数のとき，$p+10$，$p+20$に対して，

(i)　$p=2$のとき　$p+10=12$は素数でない。

(ii)　$p=3$のとき　$p+10=13$，$p+20=23$となり，ともに素数である。

(iii)　$p\geqq 5$のとき　lを2以上の自然数として，$p=3l-1$，$p=3l+1$とおくと，

・$p=3l-1$のとき　$p+10=3l+9=3(l+3)$は，3の倍数で素数でない。

・$p=3l+1$のとき　$p+20=3l+21=3(l+7)$は，3の倍数で素数でない。

(i)～(iii)より，自然数p，$p+10$，$p+20$がすべて素数となるのは$p=3$だけである。

［解 説］

ヒントなしの整数問題です。このようなときは実験をするしかなく，pの値を 2, 3, 5, 7, 11, 13, …として，$p+10$，$p+20$の値を計算しました。そうすると，3の倍数が現れてくることがわかり，これをもとに解答例を作成したわけです。なお，類題が気になったので調べたところ，2013年の阪大・理系にありました。

© 電送数学舎 2023

3

問題のページへ

$a_n>0$ のとき $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2 = 2n^2+n$ ……①から，${a_1}^2 = 2\cdot1^2+1=3$ となり $a_1=\sqrt{3}$

①より，$n\geqq 2$ で，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} {a_k}^2 = 2(n-1)^2+(n-1) = 2n^2-3n+1$ ………②

①②の両辺の差をとると，${a_n}^2 = 2n^2+n-(2n^2-3n+1) = 4n-1$ となり，

$a_n=\sqrt{4n-1}$ （$n=1$ のときも成り立っている）

すると，$\displaystyle\frac{S_n}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{4k-1} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{4k-1}{n}}$ となり，

$$\sqrt{\frac{4(k-1)}{n}} < \sqrt{\frac{4k-1}{n}} < \sqrt{\frac{4k}{n}},\ 2\sqrt{\frac{k-1}{n}} < \sqrt{\frac{4k-1}{n}} < 2\sqrt{\frac{k}{n}}$$

これより，$\displaystyle\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k-1}{n}} < \frac{S_n}{n\sqrt{n}} < \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}$ ………③

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}} = 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}} = 2\int_0^1\sqrt{x}\,dx = 2\Big[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1 = \frac{4}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k-1}{n}} = 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1}\sqrt{\frac{l}{n}} = 2\int_0^1\sqrt{x}\,dx = \frac{4}{3}$$

したがって，③より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n\sqrt{n}} = \frac{4}{3}$ である。

［解　説］

区分求積法を利用した数列の極限の問題です。③式を導くことがポイントです。

© 電送数学舎 2023

$\boxed{4}$ 問題のページへ

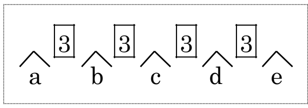
(1)　1 のカード 2 枚，2 のカード 3 枚，3 のカード 4 枚の計 9 枚を横一列に並べる。

この並べ方の総数は，$\dfrac{9!}{2!\cdot 3!\cdot 4!}=1260$ 通りである。

(2)　3 のカードが隣り合わないのは，まず 1 のカード 2 枚と 2 のカード 3 枚の計 5 枚を並べ，それらのカードの間または両端の 6 か所から 4 か所を選んで 3 のカードをさし込むと考える。すると，この並べ方は，

$$\frac{5!}{2!\cdot 3!}\times {}_6C_4=10\times 15=150\ （通り）$$

(3)　同じ数字のカードが隣り合わないのは，まず 3 のカード 4 枚を並べ，それらのカードの間または両端の位置を右図のように，a, b, c, d, e とおく。そして，a～e に 1 のカード 2 枚，2 のカード 3 枚を，同じ数字が隣り合わないようにさし込むと考える。



さて，9 枚のカードを並べたとき，両端のカードに着目して，

(i)　両端が 3 のカードのとき　b, c, d に，1 と 2 のカードをさし込む。

・$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{2}$ の形でさし込むとき　$\dfrac{3!}{2!}=3$（通り）

・$\boxed{2}\boxed{1}\boxed{2}$，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$ の形でさし込むとき　$3!=6$（通り）

・$\boxed{1}\boxed{2}$，$\boxed{1}\boxed{2}$，$\boxed{2}$ の形でさし込むとき　$\dfrac{3!}{2!}=3$（通り）

・$\boxed{1}\boxed{2}$，$\boxed{2}\boxed{1}$，$\boxed{2}$ の形でさし込むとき　$3!=6$（通り）

・$\boxed{2}\boxed{1}$，$\boxed{2}\boxed{1}$，$\boxed{2}$ の形でさし込むとき　$\dfrac{3!}{2!}=3$（通り）

よって，$3+6+3+6+3=21$ 通りとなる。

(ii)　右端のみ 3 のカードのとき　a, b, c, d に，1 と 2 のカードをさし込む。

・$\boxed{1}\boxed{2}$，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{2}$ の形でさし込むとき　$\dfrac{4!}{2!}=12$（通り）

・$\boxed{2}\boxed{1}$，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{2}$ の形でさし込むとき　$\dfrac{4!}{2!}=12$（通り）

よって，$12+12=24$ 通りとなる。

(iii) 左端のみ 3 のカードのとき　b, c, d, e に，1 と 2 のカードをさし込む。

(ii)と同様に 24 通りとなる。

(iv) 両端が 3 のカードでないとき　a, b, c, d, e に，1 と 2 のカードをさし込む。

$\boxed{1}$，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{2}$，$\boxed{2}$ の形でさし込むので，$\dfrac{5!}{2!\cdot 3!}=10$（通り）

(i)～(iv)より，同じ数字のカードが隣り合わない並べ方は，

$$21+24+24+10=79\ （通り）$$

© 電送数学舎 2023

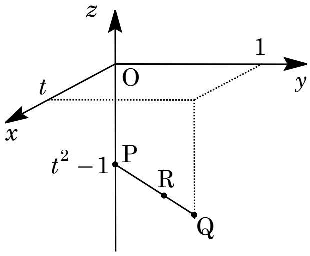
［解 説］

ややや難しめの順列の問題です。(3)は枚数の多い 3 のカードをまず並べ，1 と 2 のカードをさし込むと考えました。そして，両端のカードを基準に場合分けをしています。

© 電送数学舎 2023

5

問題のページへ



2 点 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ t^2-1)$，$\mathrm{Q}(t,\ 1,\ e^t+e^{-t}-e-e^{-1})$ に対し，t を $-1\leqq t\leqq 1$ の範囲で動かす。ここで，$0<k\leqq 1$ として，線分 PQ を $k:1-k$ に内分する点 $\mathrm{R}(x,\ y,\ z)$ とおく。

$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ より，$x=kt$，$y=k$

$$z=(1-k)(t^2-1)+k(e^t+e^{-t}-e-e^{-1})$$

これより，点 R は平面 $y=k$ 上で，

$$x=kt\cdots\cdots①,\ z=(1-k)(t^2-1)+k(e^t+e^{-t}-e-e^{-1})\cdots\cdots②$$

①より $\dfrac{dx}{dt}=k>0$，②より $\dfrac{dz}{dt}=2(1-k)t+k(e^t-e^{-t})$ となり，

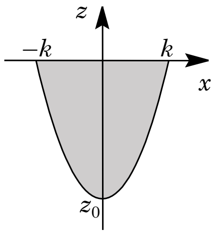
$$\frac{d^2z}{dt^2}=2(1-k)+k(e^t+e^{-t})>0$$

これより，$\dfrac{dz}{dt}$ は単調に増加し，$t=0$ のとき $\dfrac{dz}{dt}=0$ に注意すると，$-1\leqq t\leqq 1$ における $x,\ z$ の増減は右表のようになる。

t	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$\dfrac{dx}{dt}$		$+$		$+$	
x	$-k$	↗	0	↗	k
$\dfrac{dz}{dt}$		$-$	0	$+$	
z	0	↘	z_0	↗	0

なお，$t=0$ のとき $z=z_0$ とおくと，

$$z_0=-(1-k)+k(2-e-e^{-1})=(3-e-e^{-1})k-1$$



これより，平面 $y=k$ 上での点 R の軌跡は右図の曲線となり，この曲線と x 軸で囲まれる図形の面積を $S(k)$ とおくと，

$$\begin{aligned}S(k)&=\int_{-k}^{k}(-z)dx\\&=-\int_{-1}^{1}\{(1-k)(t^2-1)+k(e^t+e^{-t}-e-e^{-1})\}k\cdot dt\\&=-2k\int_0^1\{(1-k)(t^2-1)+k(e^t+e^{-t}-e-e^{-1})\}dt\\&=-2k(1-k)\Big[\frac{t^3}{3}-t\Big]_0^1-2k^2\Big[\ e^t-e^{-t}-et-e^{-1}t\Big]_0^1\\&=-2k(1-k)\Big(-\frac{2}{3}\Big)-2k^2(e-1-e^{-1}+1-e-e^{-1})\\&=\frac{4}{3}(k-k^2)+4e^{-1}k^2=\Big(4e^{-1}-\frac{4}{3}\Big)k^2+\frac{4}{3}k\cdots\cdots\cdots③\end{aligned}$$

③は $k=0$ のときも成り立っているので，線分 PQ が通過してできる曲面および 2 平面 $y=1$，$z=0$ で囲まれてできる立体の体積 V は，

$$\begin{aligned}V&=\int_0^1 S(k)dk=\int_0^1\Big\{\Big(4e^{-1}-\frac{4}{3}\Big)k^2+\frac{4}{3}k\Big\}dk\\&=\Big[\frac{1}{3}\Big(4e^{-1}-\frac{4}{3}\Big)k^3+\frac{2}{3}k^2\Big]_0^1=\frac{1}{3}\Big(4e^{-1}-\frac{4}{3}\Big)+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}e^{-1}+\frac{2}{9}\end{aligned}$$

© 電送数学舎 2023

［解 説］

線分が通過してできる曲面を境界とする立体の体積を求める問題です。点 P の y 座標が 0, 点 Q の y 座標が 1 であることに注目し, 平面 $y=k$ での切り口を考えて求積計算を行っています。

© 電送数学舎 2023