1

解答解説のページへ

平面上の 2 つのベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$は，$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，および$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$を満たすとする。kを定数とし，2 点$\mathrm{Q}(2k\vec{a}+\vec{b})$，$\mathrm{R}(-3\vec{b})$を直径の両端とする円を$C$，点$\mathrm{S}(-4\vec{b})$を通り$\vec{a}$に平行な直線を$l$とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 円Cの半径rをkを用いて表せ。

(2) 直線lが円Cと共有点をもつとき，kのとり得る値の範囲を求めよ。

2

解答解説のページへ

3 つの箱 A, B, C と，赤球 8 個，白球 30 個がある。この 38 個の球から 30 個選び，3 つの箱 A，B，C に 10 個ずつ入れるとき，次の問いに答えよ。ただし，同じ色の球は区別しないものとする。

(1)　どの箱にも少なくとも 1 個の赤球が入り，かつ，すべての赤球がいずれかの箱に入るような入れ方は何通りあるか。

(2)　入れ方は全部で何通りあるか。

3

解答解説のページへ

原点を O とする座標平面において，直線 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$ の $x>0$ の部分を l，直線 $y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x$ の $x>0$ の部分を m とする。点 P は l 上を，点 Q は m 上を，$\mathrm{PQ}=2$ を満たしながら動くとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\angle\mathrm{OPQ}=t$ とするとき，P, Q の座標を t を用いて表せ。

(2)　線分 PQ の中点 M の軌跡を求め，座標平面上に図示せよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

e を自然対数の底とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　すべての実数 x に対して，不等式 $\dfrac{e^x+e^{-x}}{2} \geqq 1+\dfrac{1}{2}x^2$ が成り立つことを示せ。

(2)　等式 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\cos 2t}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos 2t}\,dt$ が成り立つことを示せ。

(3)　不等式 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos 2t}\,dt \geqq \frac{5}{8}\pi$ が成り立つことを示せ。

5

解答解説のページへ

n を自然数とし，1 から n までの異なる n 個の自然数からなる集合を N とする。N の 2 つの部分集合 P_1，P_2 は，$P_1 \cap P_2 = \varnothing$ かつ $P_1 \cup P_2 = N$ を満たすとする。ただし，$\varnothing$ は空集合とする。P_1 の要素の総和を S_1，P_2 の要素の総和を S_2 とするとき，$S_1 = S_2$ を満たす P_1，P_2 が存在するような n の値をすべて求めよ。

1

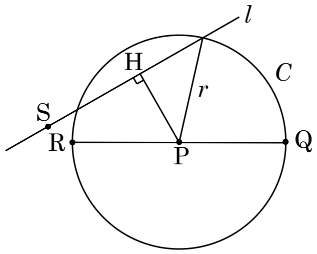
問題のページへ

(1)　$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$ のとき，2 点 $\mathrm{Q}(2k\vec{a}+\vec{b})$，$\mathrm{R}(-3\vec{b})$ を直径の両端とする円 C の半径 r は，$r=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{RQ}}|=\dfrac{1}{2}|(2k\vec{a}+\vec{b})-(-3\vec{b})|=|k\vec{a}+2\vec{b}|$ となり，

$$|k\vec{a}+2\vec{b}|^2=k^2\cdot 2^2+4k\cdot 1+4\cdot 1^2=4k^2+4k+4$$

したがって，$r=\sqrt{4k^2+4k+4}=2\sqrt{k^2+k+1}$ である。

(2)　線分 QR の中点は，$\dfrac{(2k\vec{a}+\vec{b})+(-3b)}{2}=k\vec{a}-\vec{b}$ となり，これより円 C の中心 P は $\mathrm{P}(k\vec{a}-\vec{b})$ と表せる。



また，点 $\mathrm{S}(-4\vec{b})$ を通り $\vec{a}$ に平行な直線 l 上の点 X は，t を実数として，$\mathrm{X}(-4\vec{b}+t\vec{a})$ となる。

さて，P から l に下ろした垂線の足を H とすると，t_0 を実数として，$\mathrm{H}(-4\vec{b}+t_0\vec{a})$ と表せ，

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=(-4\vec{b}+t_0\vec{a})-(k\vec{a}-\vec{b})=(t_0-k)\vec{a}-3\vec{b}$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\vec{a}=0$ から $(t_0-k)\cdot 2^2-3\cdot 1=0$ となり，$t_0=k+\dfrac{3}{4}$ より，

$$|\overrightarrow{\mathrm{PH}}|=\left|\frac{3}{4}\vec{a}-3\vec{b}\right|=\frac{3}{4}|\vec{a}-4\vec{b}|=\frac{3}{4}\sqrt{2^2-8\cdot 1+16\cdot 1^2}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$$

すると，直線 l が円 C と共有点をもつ条件は，$|\overrightarrow{\mathrm{PH}}|\leqq r$ より，

$$\frac{3}{2}\sqrt{3}\leqq 2\sqrt{k^2+k+1},\ 27\leqq 16(k^2+k+1),\ 16k^2+16k-11\geqq 0$$

よって，k のとり得る値の範囲は，$k\leqq\dfrac{-2-\sqrt{15}}{4}$，$\dfrac{-2+\sqrt{15}}{4}\leqq k$ となる。

［解 説］

平面ベクトルと図形についての基本題です。ただ，位置ベクトルの記法が教科書風でないので，戸惑ったかもしれません。

2

問題のページへ

赤球 8 個，白球 30 個の合計 38 個の球から 30 個選び，3 つの箱 A，B，C に 10 個ずつ入れる。このとき，A, B, C に入る赤球の個数をそれぞれ a, b, c とおく。

(1) すべての赤球がいずれかの箱に入るのは，赤球 8 個，白球 22 個選んだときで，しかもどの箱にも少なくとも 1 個の赤球が入るのは，

$$a+b+c=8 \quad (a \geqq 1,\ b \geqq 1,\ c \geqq 1) \cdots\cdots\cdots ①$$

①を満たす$(a,\ b,\ c)$の組の数は，右図のように 8 個の○を並べ，その間の 7 か所から 2 か所を選んで仕切りを入れる場合の数に対応する。

○|○ ○ ○ ○|○ ○ ○
a　　b　　c

これより，求める入れ方は${}_7\mathrm{C}_2=21$通りとなる。

(2) 選んだ赤球の数を $k\,(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 8)$ として，(1)と同様に考えると，

$$a+b+c=k \quad (a \geqq 0,\ b \geqq 0,\ c \geqq 0) \cdots\cdots\cdots ②$$

ここで，$a'=a+1$，$b'=b+1$，$c'=c+1$ とおくと，②は，

$$a'+b'+c'=k+3 \quad (a' \geqq 1,\ b' \geqq 1,\ c' \geqq 1) \cdots\cdots\cdots ③$$

$(a,\ b,\ c)$ の組の個数と $(a',\ b',\ c')$ の組の個数は一致するので，②を満たす $(a,\ b,\ c)$ の組は，③から ${}_{k+2}\mathrm{C}_2=\dfrac{1}{2}(k+2)(k+1)$ 通りとなる。

したがって，入れ方の総数を N とすると，

$$N=\sum_{k=0}^{8}\frac{1}{2}(k+2)(k+1)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{8}\frac{1}{3}\{(k+3)(k+2)(k+1)-(k+2)(k+1)k\}$$

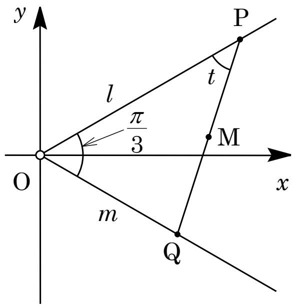
$$=\frac{1}{6}(11\cdot 10\cdot 9-2\cdot 1\cdot 0)=165$$

［解　説］

重複組合せについての有名問題です。(2)は(1)の解法の流用を考え，変数の変換を行っています。

3

問題のページへ



(1)　$l: y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x\ (x>0)$ 上の点 P，$m: y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}x\ (x>0)$ 上の点 Q に対して，$PQ=2$，$\angle OPQ=t$ のとき，

$$\angle POQ=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3},\ \angle OQP=\frac{2}{3}\pi-t$$

さて，$\triangle OPQ$ に正弦定理を適用すると，

$$\frac{OQ}{\sin t}=\frac{OP}{\sin\left(\frac{2}{3}\pi-t\right)}=\frac{2}{\sin\frac{\pi}{3}}$$

すると，$\dfrac{2}{\sin\frac{\pi}{3}}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ から，$OQ=\dfrac{4}{\sqrt{3}}\sin t$ となり，

$$OP=\frac{4}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{2}{3}\pi-t\right)=\frac{4}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t+\frac{1}{2}\sin t\right)=2\cos t+\frac{2}{\sqrt{3}}\sin t$$

ここで，点 $P(p_1,\ p_2)$，$Q(q_1,\ q_2)$ とおくと，

$$(p_1,\ p_2)=OP\left(\cos\frac{\pi}{6},\ \sin\frac{\pi}{6}\right)=\left(2\cos t+\frac{2}{\sqrt{3}}\sin t\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$
$$=\left(\sqrt{3}\cos t+\sin t,\ \cos t+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin t\right)$$

$$(q_1,\ q_2)=OQ\left(\cos\frac{\pi}{6},\ -\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4}{\sqrt{3}}\sin t\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)=\left(2\sin t,\ -\frac{2}{\sqrt{3}}\sin t\right)$$

よって，$P\left(\sqrt{3}\cos t+\sin t,\ \cos t+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin t\right)$，$Q\left(2\sin t,\ -\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin t\right)$ である。

(2)　線分 PQ の中点 M を $M(x,\ y)$ とおくと，

$$x=\frac{1}{2}(\sqrt{3}\cos t+\sin t+2\sin t)=\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos t+\sqrt{3}\sin t)=\sqrt{3}\cos\left(t-\frac{\pi}{3}\right)$$
$$y=\frac{1}{2}\left(\cos t+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin t-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin t\right)=\frac{1}{2\sqrt{3}}(\sqrt{3}\cos t-\sin t)=-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(t-\frac{\pi}{3}\right)$$

これより，$\left(\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+(-\sqrt{3}y)^2=1$ となり，$\dfrac{x^2}{3}+3y^2=1$ である。

また，$0<t<\dfrac{2}{3}\pi$ から，$-\dfrac{\pi}{3}<t-\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{\pi}{3}$ となるので，

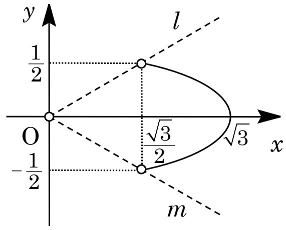
$$\frac{1}{2}<\cos\left(t-\frac{\pi}{3}\right)\leqq 1,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin\left(t-\frac{\pi}{3}\right)<\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}<x\leqq\sqrt{3}$，$-\dfrac{1}{2}<y<\dfrac{1}{2}$ である。

以上より，中点 M の軌跡は，

$$\text{楕円}\ \frac{x^2}{3}+3y^2=1\ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}<x\leqq\sqrt{3},\ -\frac{1}{2}<y<\frac{1}{2}\right)$$

図示すると右図の曲線である。ただし端点は含まない。



［解 説］

楕円を題材とした有名問題です。(2)の軌跡の限界については数式的に処理をしましたが，題意から 2 つの半直線 l と m にはさまれた領域としてもよいでしょう。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　$f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}-1-\dfrac{1}{2}x^2$ とおくと，$f'(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}-x$ となり，

$$f''(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}-1\geqq\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}-1=0$$

これより，$f'(x)$ は単調に増加し，$f'(0)=0$ に着目すると，$x<0$ で $f'(x)<0$，$x>0$ で $f'(x)>0$ となる。

すると，$f(x)$ の増減は右表のようになり，すべての実数 x に対して $f(x)\geqq 0$ から，

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}\geqq 1+\frac{1}{2}x^2\cdots\cdots\cdots①$$

(2)　$u=\dfrac{\pi}{2}-t$ とすると，$du=-dt$ となり，$t=0\to\dfrac{\pi}{2}$ のとき $u=\dfrac{\pi}{2}\to 0$ から，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\cos 2t}\,dt=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}e^{-\cos(\pi-2u)}(-du)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\cos 2u}\,du=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\cos 2t}\,dt$$

(3)　①において，$x=\cos 2t$ とおくと，$\dfrac{e^{\cos 2t}+e^{-\cos 2t}}{2}\geqq 1+\dfrac{1}{2}\cos^2 2t$ となり，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{\cos 2t}+e^{-\cos 2t}}{2}dt\geqq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{1}{2}\cos^2 2t\right)dt\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，(2)から $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{\cos 2t}+e^{-\cos 2t}}{2}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\cos 2t}\,dt\cdots\cdots③$となり，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{1}{2}\cos^2 2t\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{1+\frac{1}{4}(1+\cos 4t)\right\}dt=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(5+\cos 4t)\,dt$$

$$=\frac{1}{4}\Big[5t+\frac{1}{4}\sin 4t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{5}{4}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{5}{8}\pi\cdots\cdots\cdots④$$

③④を②に代入すると，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\cos 2t}\,dt\geqq\frac{5}{8}\pi$ が成り立つ。

［解 説］

定積分と不等式の問題です。誘導は非常に丁寧で，飛躍はまったくありません。

$\boxed{5}$

問題のページへ

$N=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ の部分集合 P_1，P_2 が，$P_1\cap P_2=\varnothing$ かつ $P_1\cup P_2=N$ を満たすとき，P_1 の要素の総和を S_1，P_2 の要素の総和を S_2 とすると，

$$S_1+S_2=1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

ここで，$S_1=S_2$ が成り立つ条件は，$S_1=S_2=\dfrac{1}{4}n(n+1)$ で，n と $n+1$ がともに偶数の場合はないことから，n または $n+1$ が 4 の倍数であることが必要である。

すなわち，m を自然数として，$n=4m$ または $n=4m-1$ と表せ，

(i)　$n=4m$ のとき　$N=\{1,\ 2,\ \cdots,\ 4m\}$，$S_1+S_2=2m(4m+1)$

ここで，$P_1=\{m+1,\ m+2,\ \cdots,\ 3m\}$，$P_2=\overline{P_1}$ とおくと，

$$S_1=(m+1)+(m+2)+\cdots+3m=\frac{1}{2}(m+1+3m)(3m-m)=m(4m+1)$$

$$S_2=2m(4m+1)-m(4m+1)=m(4m+1)$$

すると，$S_1=S_2$ を満たす P_1，P_2 が存在する。

(ii)　$n=4m-1$ のとき　$N=\{1,\ 2,\ \cdots,\ 4m-1\}$，$S_1+S_2=2m(4m-1)$

ここで，$P_1=\{m,\ m+1,\ \cdots,\ 3m-1\}$，$P_2=\overline{P_1}$ とおくと，

$$S_1=m+(m+1)+\cdots+(3m-1)=\frac{1}{2}(m+3m-1)(3m-m)=m(4m-1)$$

$$S_2=2m(4m-1)-m(4m-1)=m(4m-1)$$

すると，$S_1=S_2$ を満たす P_1，P_2 が存在する。

(i)(ii)より，求める n の値は，m を自然数として，$n=4m$ または $n=4m-1$ である。

［解 説］

集合と論証についての信州大らしい問題です。必要条件はすぐに求まりますので，十分性については，m の値を 1，2，3 として具体的に N を考え，条件を満たす P_1，P_2 を構成しました。