1

解答解説のページへ

硬貨 1 枚を投げたとき，表が出れば 2 点，裏が出れば 1 点を得るとする。硬貨を繰り返し投げて，合計得点が 10 点以上になったときに終了する。次の確率を求めよ。

(1)　7 回目に合計得点がちょうど 10 点になって終了する確率

(2)　終了時の合計得点が 10 点である確率

$\boxed{2}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　解答解説のページへ

△ABC の外心を O とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく。$|\vec{a}|=1$ とする。点 O に関する点 P の位置ベクトルが $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ であるとする。

(1)　直線 AP と直線 BC は垂直に交わることを示せ。

(2)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{3}{4}$ とする。OP // AB のとき，$\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}$ となる実数 $s,\ t$ を求めよ。

$\boxed{3}$ 解答解説のページへ

放物線 $C : y = \dfrac{1}{2}x^2 - 1$ 上にない点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ をとる。放物線 C 上の点 Q に対し直線 PQ が点 Q での C の接線と垂直に交わるとき，直線 PQ を P から C への垂線という。点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から C へ 3 本の異なる接線が引けるための a, b に関する条件を求めよ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　次の不定積分を求めよ。　$\displaystyle\int \log(1+\sqrt{x})\,dx$

(2)　点$(1,\ 1)$を中心とする半径 1 の円と，x 軸および y 軸で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。ただし，回転させる図形は円の中心を含まないものとする。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

曲線 $y=e^x$ 上の点 A における接線と法線が x 軸と交わる点を，それぞれ B，C とする。△ABC の面積が 5 のとき，△ABC の外心の座標を求めよ。

$\boxed{1}$

問題のページへ

(1)　硬貨 1 枚を投げ，表が出れば 2 点，裏が出れば 1 点を得るとするとき，表が a 回，裏が b 回出て，7 回目で合計 10 点になって終了するのは，

$$a+b=7\cdots\cdots\cdots①,\quad 2a+b=10\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$(a,\ b)=(3,\ 4)$ となり，その確率は，

$${}_7\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{35}{2^7}=\frac{35}{128}$$

(2)　(1)と同様にして，k 回目で合計 10 点になって終了するのは，$5\leqq k\leqq 10$ として，

$$a+b=k\cdots\cdots\cdots③,\quad 2a+b=10\cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$(a,\ b)=(10-k,\ 2k-10)$ となり，その確率は，

$${}_k\mathrm{C}_{10-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{10-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-10}=\frac{{}_k\mathrm{C}_{10-k}}{2^k}$$

したがって，求める確率は，

$$\sum_{k=5}^{10}\frac{{}_k\mathrm{C}_{10-k}}{2^k}=\frac{{}_5\mathrm{C}_5}{2^5}+\frac{{}_6\mathrm{C}_4}{2^6}+\frac{{}_7\mathrm{C}_3}{2^7}+\frac{{}_8\mathrm{C}_2}{2^8}+\frac{{}_9\mathrm{C}_1}{2^9}+\frac{{}_{10}\mathrm{C}_{10}}{2^{10}}$$

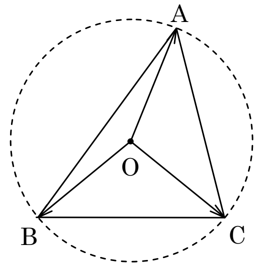
$$=\frac{1}{2^5}+\frac{15}{2^6}+\frac{35}{2^7}+\frac{28}{2^8}+\frac{9}{2^9}+\frac{1}{2^{10}}=\frac{683}{1024}$$

［解 説］

確率の基本的な問題です。

2

問題のページへ



(1) 外心 O の△ABC に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$ とする。また，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ とおく。

さて，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=-\vec{b}+\vec{c}$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(\vec{b}+\vec{c})\cdot(-\vec{b}+\vec{c})=-|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2=0$$

よって，直線 AP と直線 BC は垂直に交わる。

(2) まず，OP // AB より，k を定数として，

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=k(\vec{b}-\vec{a})\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}\cdots\cdots②$より，①は$\vec{a}+\vec{b}+(s\vec{a}+t\vec{b})=k\vec{b}-k\vec{a}$ となり，

$$(1+s)\vec{a}+(1+t)\vec{b}=-k\vec{a}+k\vec{b}$$

すると，$\vec{a}$，$\vec{b}$は 1 次独立なので，$1+s=-k$ かつ $1+t=k$ より，

$$(1+s)+(1+t)=0\,,\ \ s+t=-2\cdots\cdots\cdots③$$

また，②から$|\vec{c}|^2=s^2|\vec{a}|^2+2st\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2$ となり，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{3}{4}$ より，

$$1=s^2-\frac{3}{2}st+t^2,\ \ (s+t)^2-\frac{7}{2}st=1\cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$4-\dfrac{7}{2}st=1$，$st=\dfrac{6}{7}\cdots\cdots\cdots⑤$

③⑤より，$s,\ t$ は 2 次方程式 $x^2+2x+\dfrac{6}{7}=0$ の 2 つの解 $x=-1\pm\dfrac{1}{\sqrt{7}}$ となるので，

$$(s,\ t)=\left(-1+\frac{1}{\sqrt{7}},\ -1-\frac{1}{\sqrt{7}}\right),\ \left(-1-\frac{1}{\sqrt{7}},\ -1+\frac{1}{\sqrt{7}}\right)$$

［解　説］

平面ベクトルの図形への応用問題です。(1)は「直線 AP」という表現から $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\neq\vec{0}$ のもとで考えています。また，(2)は(1)とは独立に，与えられた 2 つの条件を s と t の連立方程式に翻訳するという方針で解いています。

3　　問題のページへ

まず，$C: y=\frac{1}{2}x^2-1$ に対し $y'=x$ となるので，C 上の点 $\mathrm{Q}\left(t,\ \frac{1}{2}t^2-1\right)$ における C の接線の方向ベクトルを $\vec{u}$ とおくと，$\vec{u}=(1,\ t)$ と表せる。

また，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ は C 上にないので，$b\neq\frac{1}{2}a^2-1$ ……①となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\left(t-a,\ \frac{1}{2}t^2-1-b\right)$$

ここで，直線 PQ が点 Q での C の接線と垂直に交わることより，$\vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=0$ となり，

$$(t-a)+t\left(\frac{1}{2}t^2-1-b\right)=0,\ \ \frac{1}{2}t^3-bt=a\ \cdots\cdots\cdots②$$

さて，点 P から C へ 3 本の異なる接線が引ける条件は，接点が 3 個，すなわち②が異なる 3 つの実数解をもつことに対応する。

そこで，$f(t)=\frac{1}{2}t^3-bt$ とおくと，$f'(t)=\frac{3}{2}t^2-b=\frac{3}{2}\left(t^2-\frac{2}{3}b\right)$ となり，

(i)　$b\leqq 0$ のとき

$f'(t)\geqq 0$ から $f(t)$ は単調に増加し，②が異なる 3 つの実数解をもつことはない。

(ii)　$b>0$ のとき

$f(t)$ の増減は右表のようになり，

t	$\cdots$	$-\sqrt{\frac{2}{3}b}$	$\cdots$	$\sqrt{\frac{2}{3}b}$	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$$f\left(\sqrt{\frac{2}{3}b}\right)=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}b-b\right)\sqrt{\frac{2}{3}b}=-\frac{2}{3}b\sqrt{\frac{2}{3}b}$$

$$f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}b}\right)=-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}b-b\right)\sqrt{\frac{2}{3}b}=\frac{2}{3}b\sqrt{\frac{2}{3}b}$$

よって，②が異なる 3 つの実数解をもつ条件は，$-\frac{2}{3}b\sqrt{\frac{2}{3}b}<a<\frac{2}{3}b\sqrt{\frac{2}{3}b}$ から，

$$|a|<\frac{2}{3}b\sqrt{\frac{2}{3}b},\ \ a^2<\frac{8}{27}b^3\ \cdots\cdots\cdots③$$

なお，③は $b>0$ を満たしている。

(i)(ii)より，求める条件は①かつ③から，$a^2<\frac{8}{27}b^3$，$b\neq\frac{1}{2}a^2-1$ である。

［解 説］

微分の応用についての典型題です。計算量も適当です。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　$I=\int\log(1+\sqrt{x})\,dx$ とおき，C，C' を積分定数とする。

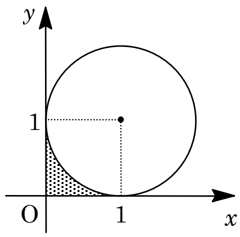
まず，$t=1+\sqrt{x}$ とおくと，$dt=\dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$ となり，$dx=2(t-1)\,dt$ から，

$$I=\int\log t\cdot 2(t-1)\,dt=(t-1)^2\log t-\int(t-1)^2\cdot\frac{1}{t}\,dt$$
$$=(t-1)^2\log t-\int\left(t-2+\frac{1}{t}\right)dt=(t-1)^2\log t-\frac{t^2}{2}+2t-\log t+C'$$
$$=x\log(1+\sqrt{x})-\frac{(1+\sqrt{x})^2}{2}+2(1+\sqrt{x})-\log(1+\sqrt{x})+C'$$
$$=(x-1)\log(1+\sqrt{x})+\sqrt{x}-\frac{1}{2}x+C$$

(2)　中心$(1,\ 1)$，半径 1 の円の方程式は，

$$(x-1)^2+(y-1)^2=1$$

そして，下側の半円は，$y=1-\sqrt{1-(x-1)^2}$



これより，右図の網点部を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は，

$$V=\pi\int_0^1\left\{1-\sqrt{1-(x-1)^2}\right\}^2dx$$
$$=\pi\int_0^1\{2-(x-1)^2\}dx-2\pi\int_0^1\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx$$

ここで，$I_1=\int_0^1\{2-(x-1)^2\}dx$，$I_2=\int_0^1\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx$ とおくと，

$$I_1=\left[2x-\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_0^1=2-\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$$

また，$x-1=t$ とおくと $dx=dt$ となり，$I_2=\int_{-1}^0\sqrt{1-t^2}\,dt=\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot1^2=\frac{\pi}{4}$

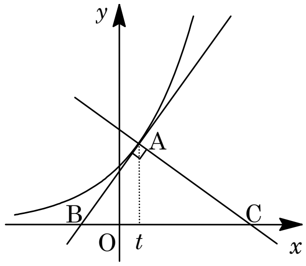
よって，$V=\pi I_1-2\pi I_2=\dfrac{5}{3}\pi-\dfrac{\pi^2}{2}$ となる。

［解　説］

不定積分の計算と立体の体積を求める小問 2 題の構成です。なお，(2)の I_2 は，半径 1 の四分円の面積を対応させています。

$\boxed{5}$

問題のページへ



曲線 $y=e^x$ に対して $y'=e^x$ となり，この曲線上の点 $\mathrm{A}(t,\ e^t)$ における接線の方程式は,

$$y-e^t=e^t(x-t)$$

すると, x 軸との交点 B の x 座標は $-e^t=e^t(x-t)$ より,

$$x=t-1$$

また, 点 A における法線の方程式は,

$$y-e^t=-e^{-t}(x-t)$$

すると, x 軸との交点 C の x 座標は $-e^t=-e^{-t}(x-t)$ より，$x=t+e^{2t}$ となる。

よって，$\mathrm{B}(t-1,\ 0)$，$\mathrm{C}(t+e^{2t},\ 0)$ である。

さて，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積は 5 より，$\dfrac{1}{2}\{(t+e^{2t})-(t-1)\}e^t=5$ となり,

$$e^{3t}+e^t-10=0\,,\ (e^t-2)(e^{2t}+2e^t+5)=0$$

すると，$e^t>0$ から $e^t=2$，すなわち $t=\log 2$ となり,

$$\mathrm{B}(\log 2-1,\ 0)\,,\ \mathrm{C}(\log 2+4,\ 0)$$

このとき，$\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\pi}{2}$ から，$\triangle\mathrm{ABC}$ の外心は辺 BC の中点となるので, その座標は, $\left(\dfrac{\log 2-1+\log 2+4}{2},\ 0\right)=\left(\log 2+\dfrac{3}{2},\ 0\right)$ である。

［解　説］

接線と法線が題材の基本的な問題です。計算量は少なめです。