1

解答解説のページへ

次の 3 条件をすべて満たす xy 平面上の円 C が存在するような実数 t を求めよ。

(i)　円 C の半径は 3 である。

(ii)　円 C は x 軸に接する。

(iii)　点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ は円 C 上にあり，点 P における円 C の接線の方程式は $y = 2tx - t^2$ である。

2

解答解説のページへ

さいころを 1000 回投げるとき，1 の目がちょうど k 回出る確率を P_k とおく。P_k が最大となる k を求めよ。

3

解答解説のページへ

実数 a は $a>-1$ とする。関数 $f(x)=3x^3-7x^2+5x-1$ に対し，

$$-1<c<a\,,\ \ \frac{f(a)-f(-1)}{a+1}=f'(c)$$

となる c がちょうど 2 つ存在するような a の値の範囲を求めよ。

4

解答解説のページへ

行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は次の条件(i), (ii)を満たすものとする。

(i)　$a+d=1$

(ii)　$A^2-A-2E=O$

ただし，E は単位行列で，O は零行列である。

このとき，次の問いに答えよ。

(1)　次の関係式を満たす実数 x, y は $x=y=0$ に限ることを示せ。

$$xA+yE=O$$

(2)　自然数 n に対し，A^n はある実数 x_n，y_n を用いて，$A^n=x_nA+y_nE$ の形で表せることを示し，数列 $\{x_n-y_n\}$，$\{2x_n+y_n\}$ の一般項を求めよ。

(3)　自然数 n に対し，$A^n=\begin{pmatrix} p_n & q_n \\ r_n & s_n \end{pmatrix}$ とおく。p_n+s_n を求めよ。

$\boxed{5}$ 解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ に対し，$x < \tan x$ となることを示せ。

(2)　$x > 0$ に対し，$\log\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) > \sin x$ となることを示せ。ただし，対数は自然対数である。

1　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　問題のページへ

(a)　$t \neq 0$ のとき

条件より，半径 3 の円 C は x 軸に接し，しかも y 座標が正の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ を通るので，a を定数として，その中心を $\mathrm{A}(a,\ 3)$ とおくことができる。

これより，円 C の方程式は，

$$(x-a)^2+(y-3)^2=9,\ (x-a)^2+y^2-6y=0$$

そして，$\mathrm{P}(t,\ t^2)$ を通ることより，$(t-a)^2+t^4-6t^2=0$ ………①

また，点 P における円 C の接線の方程式が $y=2tx-t^2$ より，その方向ベクトルを $\vec{u}$ とおくと，$\vec{u}=(1,\ 2t)$ と表せる。

すると，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(t-a,\ t^2-3)$ と $\vec{u}$ は垂直なので，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{u}=0$ より，

$$(t-a)+2t(t^2-3)=0 \text{ ………②}$$

①②より，$4t^2(t^2-3)^2+t^4-6t^2=0$ となり，$t^2(4t^4-24t^2+36+t^2-6)=0$ から，

$$t^2(4t^4-23t^2+30)=0,\ t^2(t^2-2)(4t^2-15)=0$$

よって，$t\neq 0$ から $t=\pm\sqrt{2},\ \pm\dfrac{\sqrt{15}}{2}$ である。

なお，それぞれの t の値に対して，②から a の値は 1 つずつ決まる。

(b)　$t=0$ のとき

半径 3 の円 C は x 軸に接し，しかも点 $\mathrm{P}(0,\ 0)$ を通るので，その中心は $(0,\ 3)$ または $(0,\ -3)$ となる。そして，P における C の接線の方程式は，どちらも $y=0$ なので，条件を満たしている。

(a)(b)より，求める t の値は，$t=0,\ \pm\sqrt{2},\ \pm\dfrac{\sqrt{15}}{2}$ である。

［解 説］

円を題材にした基本的な問題です。①と②の連立方程式を解くことがポイントです。なお，うっかり $t=0$ の場合を失念していましたが……。

2

問題のページへ

さいころを 1000 回投げるとき，1 の目がちょうど k 回出る確率 P_k は,

$$P_k={}_{1000}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{1000-k}=\frac{1000!}{k!\,(1000-k)!}\cdot\frac{5^{1000-k}}{6^{1000}}$$

すると，$P_{k+1}=\dfrac{1000!}{(k+1)!\,(999-k)!}\cdot\dfrac{5^{999-k}}{6^{1000}}$ となり，

$$\frac{P_{k+1}}{P_k}=\frac{1000!}{(k+1)!\,(999-k)!}\cdot\frac{5^{999-k}}{6^{1000}}\cdot\frac{k!\,(1000-k)!}{1000!}\cdot\frac{6^{1000}}{5^{1000-k}}=\frac{1000-k}{5(k+1)}$$

ここで，$\dfrac{P_{k+1}}{P_k}>1$ とすると，$\dfrac{1000-k}{5(k+1)}>1$ から $1000-k>5k+5$ となり，

$$6k<995,\ \ k<\frac{995}{6}=165+\frac{5}{6}$$

これより，$k\leqq 165$ のとき $P_{k+1}>P_k$，$k\geqq 166$ のとき $P_{k+1}<P_k$ となり，

$$P_0<P_1<\cdots<P_{165}<P_{166}>P_{167}>\cdots>P_{1000}$$

よって，$k=166$ のとき P_k は最大となる。

［解　説］

確率の最大に関する超有名頻出問題です。

$\boxed{3}$

問題のページへ

$f(x)=3x^3-7x^2+5x-1$ に対し，$f'(x)=9x^2-14x+5$ となり，$a>-1$ のとき，

$$\frac{f(a)-f(-1)}{a+1}=f'(c)\quad(-1<c<a)\cdots\cdots\cdots①$$

そして，①を満たす c がちょうど 2 つ存在する a の条件を求める。

$$\frac{f(a)-f(-1)}{a+1}=\frac{(3a^3-7a^2+5a-1)-(-3-7-5-1)}{a+1}$$

$$=\frac{3(a^3+1)-7(a^2-1)+5(a+1)}{a+1}$$

$$=3(a^2-a+1)-7(a-1)+5=3a^2-10a+15$$

すると，①から，$3a^2-10a+15=9c^2-14c+5$ となり，

$$9c^2-14c-(3a^2-10a+10)=0\cdots\cdots\cdots②$$

これより，②を満たす c が $-1<c<a$ に 2 つ存在する a の条件を求める。

そこで，②の左辺を $g(c)$ とおくと，$g(c)=9c^2-14c-(3a^2-10a+10)$ となり，

$$g(c)=9\left(c-\frac{7}{9}\right)^2-3a^2+10a-\frac{139}{9}$$

よって，求める条件は，$a>\dfrac{7}{9}\cdots\cdots③$のもとで，

$$g(-1)>0\cdots\cdots\cdots④,\quad g\left(\frac{7}{9}\right)<0\cdots\cdots\cdots⑤,\quad g(a)>0\cdots\cdots\cdots⑥$$

④より，$9+14-3a^2+10a-10>0$，$3a^2-10a-13<0$ となり，

$$(a+1)(3a-13)<0,\quad -1<a<\frac{13}{3}\cdots\cdots\cdots⑦$$

⑤より，$-3a^2+10a-\dfrac{139}{9}<0$，$3a^2-10a+\dfrac{139}{9}>0$ となり，

$$3\left(a-\frac{5}{3}\right)^2-\frac{25}{3}+\frac{139}{9}>0,\quad 3\left(a-\frac{5}{3}\right)^2+\frac{64}{9}>0$$

すると，⑤はつねに成立する。

⑥より，$9a^2-14a-3a^2+10a-10>0$，$3a^2-2a-5>0$ となり，

$$(a+1)(3a-5)>0,\quad a<-1 \text{ または } \frac{5}{3}<a\cdots\cdots\cdots⑧$$

以上より，求める a の条件は，③⑦⑧から $\dfrac{5}{3}<a<\dfrac{13}{3}$ である。

［解 説］

平均変化率と微分係数を題材にした問題ですが，内容的には，2 次方程式の解の配置に帰着できるものです。

4

問題のページへ

(1)　$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し，$a+d=1$ ……①，$A^2-A-2E=O$ ……②のとき，

$xA+yE=O$　(x, y は実数) ………③

(a)　$x=0$ のとき　③より $yE=O$ となり，$y=0$ である。

(b)　$x\neq 0$ のとき　③より $A=kE\left(k=-\dfrac{y}{x}\right)$ となり，①から $k+k=1$ なので，

$k=\dfrac{1}{2}$，$A=\dfrac{1}{2}E$

すると，$A^2-A-2E=\dfrac{1}{4}E-\dfrac{1}{2}E-2E=-\dfrac{9}{4}E$ となり，②を満たさない。

(a)(b)より，③を満たす実数 x, y は $x=y=0$ に限る。

(2)　ある実数 x_n，y_n を用い，$A^n=x_nA+y_nE$ と表せることを数学的帰納法で示す。

(i)　$n=1$ のとき　$A^1=1\cdot A+0\cdot E$ より，$x_1=1$，$y_1=0$ とおくと，(1)より，

$A^1=x_1A+y_1E$

(ii)　$n=k$ のとき　$A^k=x_kA+y_kE$ と仮定すると，$A^{k+1}=A^kA=x_kA^2+y_kA$

②より，$A^{k+1}=x_k(A+2E)+y_kA=(x_k+y_k)A+2x_kE$

ここで，$x_{k+1}=x_k+y_k$，$y_{k+1}=2y_k$ とおくと，(1)より，

$A^{k+1}=x_{k+1}A+y_{k+1}E$

(i)(ii)より，ある実数 x_n，y_n を用い，$A^n=x_nA+y_nE$ と表せる。

したがって，数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ は，$x_1=1$，$y_1=0$ のもとで，

$x_{n+1}=x_n+y_n$ ………④，$y_{n+1}=2y_n$ ………⑤

④－⑤より，$x_{n+1}-y_{n+1}=-x_n+y_n=(-1)(x_n-y_n)$ となり，

$x_n-y_n=(x_1-y_1)(-1)^{n-1}=(-1)^{n-1}$ ………⑥

④×2＋⑤より，$2x_{n+1}+y_{n+1}=4x_n+2y_n=2(2x_n+y_n)$ となり，

$2x_n+y_n=(2x_1+y_1)\cdot 2^{n-1}=2\cdot 2^{n-1}=2^n$ ………⑦

(3)　$A^n=\begin{pmatrix} p_n & q_n \\ r_n & s_n \end{pmatrix}$ とおくと，$A^n=x_nA+y_nE=x_n\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+y_n\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ から，

$p_n+s_n=ax_n+y_n+dx_n+y_n=(a+d)x_n+2y_n$

すると，①より，$p_n+s_n=x_n+2y_n$ となり，⑥⑦から，

$p_n+s_n=(2x_n+y_n)-(x_n-y_n)=2^n-(-1)^{n-1}=2^n+(-1)^n$

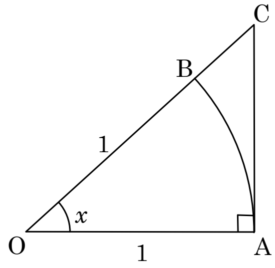
［解　説］

行列の n 乗についての標準的な問題です。連立漸化式も誘導がついているので，処理に複雑な箇所はありません。

5

問題のページへ

(1)　$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，右図において，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=1$，$\angle\mathrm{AOB}=x$，$\angle\mathrm{OAC}=\dfrac{\pi}{2}$ とする。



すると，扇形 OAB の面積は $\dfrac{1}{2}\cdot 1^2\cdot x=\dfrac{x}{2}$，直角三角形 OAC の面積は $\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot \tan x=\dfrac{\tan x}{2}$ となるので，

$$\frac{x}{2}<\frac{\tan x}{2},\quad x<\tan x$$

(2)　$x>0$ のとき，$f(x)=\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sin x$ とおくと，

(i)　$x\geqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$f(x)>\log(x+x)-\sin x\geqq\log\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right)-\sin x>\log e-\sin x=1-\sin x\geqq 0$$

(ii)　$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)-\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\cos x$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}=\frac{\sqrt{1+\tan^2 x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+\tan^2 x}}$$

(1)から，$\sqrt{1+\tan^2 x}>\sqrt{1+x^2}$ となり，$f'(x)>0$ なので，

$$f(x)>f(0)=\log 1-\sin 0=0\quad\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

(i)(ii)より，$x>0$ のとき $f(x)>0$，すなわち $\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)>\sin x$ である。

［解 説］

(1)の証明は，検定教科書に書かれているように記しましたが，書き方をいつも迷ってしまいます。また，(2)は(1)を利用するはずなので，最初に場合分けをしています。なお，$\cos x$ を $\tan x$ に関連づけるところが要点になっています。