1

解答解説のページへ

(1)　式 $1=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}$ を満たす自然数の組$(a_1,\ a_2,\ a_3)$で，$1 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq a_3$となるものをすべて求めよ。

(2) r を正の有理数とする。式 $r=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}$ を満たす自然数の組$(a_1,\ a_2,\ a_3)$で，$1 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq a_3$となるものは有限個しかないことを証明せよ。ただし，そのような組が存在しない場合は 0 個とし，有限個であるとみなす。

2

解答解説のページへ

(1)　x が $-\dfrac{\pi}{4} \leqq x \leqq \dfrac{3\pi}{4}$ を満たしながら変わるとき，$\sin x + \cos x$ の値の範囲を求めよ。

(2)　x が $-\dfrac{\pi}{4} \leqq x \leqq \dfrac{3\pi}{4}$ を満たしながら変わるとき，$\sin 2x - \sin x - \cos x$ の最大値と最小値を求めよ。

3

解答解説のページへ

実数 p, q と自然数 n に対して，$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ とおく。

(1) $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ かつ $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ とする。このとき p と q が満たす条件を求めよ。

(2) $(p,\ q) \neq (0,\ 0)$ とする。極限 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{y_n}{x_n}$ を求めよ。

4

解答解説のページへ

a を定数とする。放物線 $y=a-x^2$ の接線のうち，原点との距離が最小になるものの方程式を求めよ。またそのときの距離を求めよ。

$\boxed{5}$ 解答解説のページへ

曲線$C : y = e^x$について以下の問いに答えよ。

(1) C上の点$\mathrm{P}(p,\ e^p)$における接線lおよび法線nの方程式を求めよ。

(2) $p>0$とする。Cとlおよびy軸で囲まれる図形の面積を$S(p)$とする。また，Cとnおよびy軸で囲まれる図形の面積を$T(p)$とする。このとき極限$\displaystyle\lim_{p\to\infty}\frac{pT(p)}{S(p)}$を求めよ。

1　　　　問題のページへ

(1)　自然数の組$(a_1,\ a_2,\ a_3)$に対して，条件より，$1=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}$ ………①

ここで，$1\leqq a_1\leqq a_2\leqq a_3$より，$1\geqq\dfrac{1}{a_1}\geqq\dfrac{1}{a_2}\geqq\dfrac{1}{a_3}>0$となり，①から，

$$1\leqq\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_1}=\frac{3}{a_1}$$

よって，$a_1\leqq 3$から，$a_1=1,\ 2,\ 3$となる。

(i)　$a_1=1$のとき　①より$\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}=0$となり，不適である。

(ii)　$a_1=2$のとき　①より$\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}=\dfrac{1}{2}$となり，

$$a_2a_3=2a_2+2a_3,\ (a_2-2)(a_3-2)=4$$

ここで，$0\leqq a_2-2\leqq a_3-2$から，$(a_2-2,\ a_3-2)=(1,\ 4),\ (2,\ 2)$となり，

$$(a_2,\ a_3)=(3,\ 6),\ (4,\ 4)$$

(iii)　$a_1=3$のとき　①より$\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}=\dfrac{2}{3}$となり，

$$2a_2a_3=3a_2+3a_3,\ 4a_2a_3=6a_2+6a_3,\ (2a_2-3)(2a_3-3)=9$$

ここで，$3\leqq 2a_2-3\leqq 2a_3-3$から，$(2a_2-3,\ 2a_3-3)=(3,\ 3)$となり，

$$(a_2,\ a_3)=(3,\ 3)$$

(i)～(iii)より，$(a_1,\ a_2,\ a_3)=(2,\ 3,\ 6),\ (2,\ 4,\ 4),\ (3,\ 3,\ 3)$

(2)　rを正の有理数とし，$1\leqq a_1\leqq a_2\leqq a_3$である自然数の組$(a_1,\ a_2,\ a_3)$に対して，

$$r=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\ \cdots\cdots\cdots②$$

(1)と同様にすると，②から，$r\leqq\dfrac{3}{a_1}$となり，$1\leqq a_1\leqq\dfrac{3}{r}$ ………③

すると，$\dfrac{3}{r}<1\ (r>3)$のとき，③を満たす自然数a_1は存在しない。

また，$\dfrac{3}{r}\geqq 1\ (0<r\leqq 3)$のとき，③を満たす自然数$a_1$は有限個存在し，その 1 つを$a_1=\alpha\left(1\leqq\alpha\leqq\dfrac{3}{r}\right)$とおくと，②は$\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}=r-\dfrac{1}{\alpha}$となる。

さらに，$r-\dfrac{1}{\alpha}=s$とおきかえると，有理数sに対して，

$$\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}=s\ \cdots\cdots\cdots④$$

すると，$s\leqq 0$のとき，④を満たす自然数a_2，a_3は存在しない。

また，$s>0$のとき，pとqを互いに素な自然数として，$s=\dfrac{q}{p}$とおく。

このとき，④は，$\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}=\dfrac{q}{p}$と表せ，

$$qa_2a_3=pa_2+pa_3,\ q^2a_2a_3=pqa_2+pqa_3,\ (qa_2-p)(qa_3-p)=p^2$$

すると，qa_2-p と qa_3-p は p^2 の約数となり，自然数 a_2，a_3 は存在しても有限個である。

以上より，②を満たす自然数の組 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ で，$1 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq a_3$ であるものは有限個しかない。

［解 説］

(1)では，a_1 を求めた後，a_2，a_3 を同時に求めるために，因数分解をもとに約数・倍数の関係を利用しました。(2)も同じ方法で解答例を作りましたが，やや散漫な感じです。そのため，(1)で a_1 を絞り込んだ後も，不等式で評価して a_2 そして a_3 と順に求め，(2)も同じ方法にした方がスッキリしたかもしれません。

2

問題のページへ

(1)　$-\dfrac{\pi}{4} \leqq x \leqq \dfrac{3\pi}{4}$ のとき，$t = \sin x + \cos x$ とおくと，$t = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

すると，$0 \leqq x + \dfrac{\pi}{4} \leqq \pi$ から，$0 \leqq t \leqq \sqrt{2}$ である。

(2)　$-\dfrac{\pi}{4} \leqq x \leqq \dfrac{3\pi}{4}$ のとき，$f(x) = \sin 2x - \sin x - \cos x$ とおくと，(1)から，

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x = (\sin x + \cos x)^2 - (\sin^2 x + \cos^2 x) = t^2 - 1$$

これより，$f(x) = t^2 - 1 - t = \left(t - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{5}{4}\ (0 \leqq t \leqq \sqrt{2})$ となる。

よって，$f(x)$ の最大値は $1 - \sqrt{2}\ (t = \sqrt{2})$，最小値は $-\dfrac{5}{4}\left(t = \dfrac{1}{2}\right)$ である。

［解　説］

三角関数の最大・最小問題です。(1)の誘導のために(2)の結論は容易に導けます。

3　　問題のページへ

(1)　$A=\begin{pmatrix}-\frac{5}{2} & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$ とおくと，条件より $\begin{pmatrix}x_n \\ y_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}p \\ q\end{pmatrix}$ となり，$\begin{pmatrix}x_1 \\ y_1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}p \\ q\end{pmatrix}$ から，n を 0 以上の整数として，$x_0=p$，$y_0=q$ とする。

また，$\begin{pmatrix}x_{n+1} \\ y_{n+1}\end{pmatrix}=A^{n+1}\begin{pmatrix}p \\ q\end{pmatrix}=AA^n\begin{pmatrix}p \\ q\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_n \\ y_n\end{pmatrix}$ より，

$$x_{n+1}=-\frac{5}{2}x_n+2y_n\cdots\cdots\cdots①,\quad y_{n+1}=-\frac{1}{2}x_n\cdots\cdots\cdots②$$

①より $2y_n=x_{n+1}+\frac{5}{2}x_n$ となり，②に代入すると，

$$x_{n+2}+\frac{5}{2}x_{n+1}=-x_n,\quad x_{n+2}+\frac{5}{2}x_{n+1}+x_n=0\cdots\cdots\cdots③$$

③を変形すると，$x_{n+2}+\frac{1}{2}x_{n+1}=-2\left(x_{n+1}+\frac{1}{2}x_n\right)$ となり，$x_1=-\frac{5}{2}p+2q$ から，

$$x_{n+1}+\frac{1}{2}x_n=\left(x_1+\frac{1}{2}x_0\right)(-2)^n=(-2p+2q)(-2)^n$$
$$=(p-q)(-2)^{n+1}\cdots\cdots\cdots④$$

同様に③を変形し，$x_{n+2}+2x_{n+1}=-\frac{1}{2}(x_{n+1}+2x_n)$ から，

$$x_{n+1}+2x_n=(x_1+2x_0)\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\left(-\frac{1}{2}p+2q\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$
$$=(p-4q)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\cdots\cdots\cdots⑤$$

④⑤より，$\frac{3}{2}x_n=(p-4q)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}-(p-q)(-2)^{n+1}$ となり，

$$x_n=\frac{2}{3}(p-4q)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}-\frac{2}{3}(p-q)(-2)^{n+1}\cdots\cdots\cdots⑥$$

②より，$y_n=-\frac{1}{2}x_{n-1}=-\frac{1}{3}(p-4q)\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{3}(p-q)(-2)^n\cdots\cdots\cdots⑦$

以上より，与えられた $\lim_{n\to\infty}x_n=0$ かつ $\lim_{n\to\infty}y_n=0$ を，p と q が満たす条件に言い換えると，⑥⑦から $p=q$ である。

(2)　(i)　$p=q$ のとき　⑥⑦より，

$$x_n=\frac{2}{3}(p-4p)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}=p\left(-\frac{1}{2}\right)^n,\quad y_n=-\frac{1}{3}(p-4p)\left(-\frac{1}{2}\right)^n=p\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

すると，$x_n=y_n$ となり，$(p,\ q)\neq(0,\ 0)$ から，$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=1$ である。

(ii)　$p\neq q$ のとき　⑥⑦より，

$$\frac{y_n}{x_n}=\frac{-(p-4q)\left(-\frac{1}{2}\right)^n+(p-q)(-2)^n}{-(p-4q)\left(-\frac{1}{2}\right)^n+(p-q)(-2)^{n+2}}=\frac{-(p-4q)\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n}+(p-q)}{-(p-4q)\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n}+4(p-q)}$$

すると，$p-q\neq 0$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\frac{1}{4}$ である。

［解　説］

与えられた条件式を漸化式として表し，それを解くという流れで記しています。なお，誘導はありませんが，直接的に A^n を求めるという方法もあります。ただ，予備知識が必要ですが。

4

問題のページへ

放物線 $y=a-x^2$ に対して $y'=-2x$ となり，点 $(t,\ a-t^2)$ における接線の方程式は，

$$y-(a-t^2)=-2t(x-t),\ 2tx+y-t^2-a=0 \cdots\cdots\text{①}$$

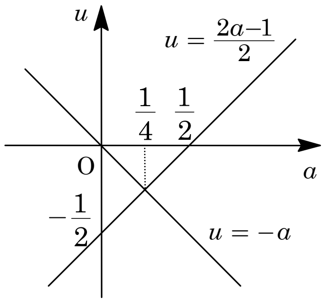
ここで，接線①と原点との距離の 2 乗を D として，$u=t^2\geqq 0$ とおくと，

$$D=\left(\frac{|-t^2-a|}{\sqrt{4t^2+1}}\right)^2=\frac{(t^2+a)^2}{4t^2+1}=\frac{(u+a)^2}{4u+1}\cdots\cdots\text{②}$$

$$\frac{dD}{du}=\frac{2(u+a)(4u+1)-4(u+a)^2}{(4u+1)^2}=\frac{2(u+a)(2u-2a+1)}{(4u+1)^2}$$

このとき，$\dfrac{dD}{du}=0$ とすると，$u=-a,\ \dfrac{2a-1}{2}$ となる。

さて，$u\geqq 0$ における $u=-a$，$u=\dfrac{2a-1}{2}$ の大小関係を調べるために，グラフを書くと右図のようになり，



ⓐ　$a<0$ のとき　$\dfrac{2a-1}{2}<0<-a$

ⓑ　$0\leqq a<\dfrac{1}{4}$ のとき　$\dfrac{2a-1}{2}<-a\leqq 0$

ⓒ　$\dfrac{1}{4}\leqq a<\dfrac{1}{2}$ のとき　$-a\leqq\dfrac{2a-1}{2}<0$

ⓓ　$a\geqq\dfrac{1}{2}$ のとき　$-a<0\leqq\dfrac{2a-1}{2}$

これより，次の 3 つの場合で，$u\geqq 0$ において D が最小になる場合を考える。

(i)　$a<0$ のとき

右の増減表より，D は $u=-a\ (t=\pm\sqrt{-a})$ で最小になる。このとき，接線の方程式は，①より，

$$\pm 2\sqrt{-a}x+y=0$$

また，原点との距離は，②より $\sqrt{D}=0$ である。

u	0	$\cdots$	$-a$	$\cdots$
$\dfrac{dD}{du}$		$-$	0	$+$
D	a^2	↘	0	↗

(ii)　$0\leqq a<\dfrac{1}{2}$ のとき

右の増減表より，D は $u=0\ (t=0)$ で最小になる。このとき，接線の方程式は，①より，

$$y-a=0$$

また，原点との距離は，②より $\sqrt{D}=a$ である。

u	0	$\cdots$
$\dfrac{dD}{du}$		$+$
D	a^2	↗

(iii)　$a\geqq\dfrac{1}{2}$ のとき

右の増減表より，D は $u=\dfrac{2a-1}{2}$ $\left(t=\pm\sqrt{\dfrac{2a-1}{2}}\right)$ で最小になる。このとき，接線の方程式は，①より，

u	0	$\cdots$	$\dfrac{2a-1}{2}$	$\cdots$
$\dfrac{dD}{du}$		$-$	0	$+$
D	a^2	↘	$\dfrac{4a-1}{4}$	↗

$$\pm 2\sqrt{\frac{2a-1}{2}}x+y-\frac{2a-1}{2}-a=0\,,\ \pm\sqrt{4a-2}x+y-\frac{4a-1}{2}=0$$

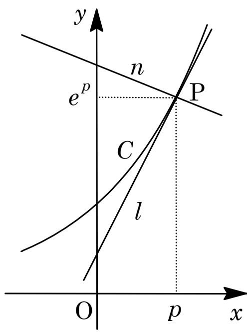
また，原点との距離は，②より $\sqrt{D}=\dfrac{\sqrt{4a-1}}{2}$ である。

［解 説］

微分と増減についての問題です。非常に単純な設定にもかかわらず，内容は驚くほど豊富です。要演習の 1 題です。なお，増減表を作る前に，大小関係を把握するためにグラフを描いていますが，このときの場合分けⓑとⓒは，$u \geqq 0$ での D の増減については同じなので，まとめて記しています。

5

問題のページへ



(1)　$C: y=e^x$ に対して $y'=e^x$ より，C 上の点 $\mathrm{P}(p,\ e^p)$ における接線 l の方程式は,

$$y-e^p=e^p(x-p),\quad y=e^px-pe^p+e^p$$

また, 点 P における法線 n の方程式は,

$$y-e^p=-e^{-p}(x-p),\quad y=-e^{-p}x+pe^{-p}+e^p$$

(2)　$p>0$ のとき，C と l および y 軸で囲まれる図形の面積 $S(p)$ は,

$$S(p)=\int_0^p(e^x-e^px+pe^p-e^p)dx$$

$$=\Big[e^x-\frac{e^p}{2}x^2+(pe^p-e^p)x\Big]_0^p=e^p-1-\frac{p^2e^p}{2}+(p^2e^p-pe^p)$$

$$=\Big(\frac{p^2}{2}-p+1\Big)e^p-1$$

また, C と n および y 軸で囲まれる図形の面積 $T(p)$ は,

$$T(p)=\frac{1}{2}\{(pe^{-p}+e^p)-(-pe^p+e^p)\}p-S(p)$$

$$=\frac{p^2}{2}e^{-p}+\Big(\frac{p}{2}+\frac{p^2}{2}-\frac{p}{2}-\frac{p^2}{2}+p-1\Big)e^p+1=\frac{p^2}{2}e^{-p}+(p-1)e^p+1$$

これより，$pT(p)=\dfrac{p^3}{2}e^{-p}+(p^2-p)e^p+p$ となり,

$$\frac{pT(p)}{S(p)}=\frac{p^3e^{-p}+2(p^2-p)e^p+2p}{(p^2-2p+2)e^p-2}=\frac{p^3e^{-2p}+2(p^2-p)+2pe^{-p}}{(p^2-2p+2)-2e^{-p}}$$

$$=\frac{pe^{-2p}+2(1-p^{-1})+2p^{-1}e^{-p}}{(1-2p^{-1}+2p^{-2})-2p^{-2}e^{-p}}$$

すると，$p\to\infty$ のとき $pe^{-2p}\to 0$ となるので，$\displaystyle\lim_{p\to\infty}\frac{pT(p)}{S(p)}=\frac{2}{1}=2$ である。

［解 説］

接線・法線と面積計算に極限が付加された微積分の総合問題です。なお, 最後の行の $pe^{-2p}\to 0\ (p\to\infty)$ については, 証明なしで利用しています。