1

解答解説のページへ

3 個の玉が横に 1 列に並んでいる。コインを 1 回投げて，それが表であれば，そのときに中央にある玉とその左にある玉とを入れ替える。また，それが裏であれば，そのときに中央にある玉とその右にある玉とを入れ替える。この操作を繰り返す。

(1) 最初に中央にあったものが n 回後に中央にある確率を求めよ。

(2) 最初に右端にあったものが n 回後に右端にある確率を求めよ。

2

解答解説のページへ

次の各問いに答えよ。

(1) 3 つのベクトル $\vec{a}=(2,\ 1,\ 1)$，$\vec{b}=(2,\ s,\ t)$，$\vec{c}=(p,\ q,\ 2)$ が次の条件を満たすような, s, t, p, q の値を求めよ。

(i) $|\vec{a}|=|\vec{b}|$

(ii) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角は $60°$

(iii) $\vec{c}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の両方に直交する。

(2) n を 0 以上の整数とする。$n+1$ 個の自然数 2^0，2^1，$\cdots$，2^n の中に, 最上位の桁の数字が 1 であるものはいくつあるか。ただし, x を超えない最大の整数を表す記号 $[x]$ を用いて解答してよい。

注：たとえば 2014 の最上位の桁の数字は 2 であり, 14225 の最上位の桁の数字は 1 である。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

a を正の数とする。このとき，次の関係式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{a}} f(t)\cos(at-2ax)\,dt+1$$

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

関数 $f(x)$ は，$f''(x)<0$ を満たすとする。$t \geqq 0$ のとき，次の(1)，(2)の不等式が成り立つことを示せ。

(1)　$f(0)+f'(t)t \leqq f(t) \leqq f(0)+f'(0)t$

(2)　$\dfrac{f(0)t+f(t)t}{2} \leqq \displaystyle\int_0^t f(u)\,du \leqq f(0)t+\dfrac{f'(0)}{2}t^2$

5

解答解説のページへ

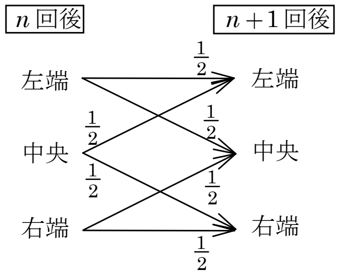
すべての実数 $x,\ y$ に対して不等式 $\dfrac{1}{1+x^2+(y-x)^2} \leqq \dfrac{a}{1+x^2+y^2}$ が成り立つとき，a の値の範囲を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　最初に中央にあった玉が，与えられた操作を n 回繰り返した後，左端，中央，右端のある確率を，それぞれ a_n，b_n，c_n とおく。

すると，$a_1=c_1=\dfrac{1}{2}$，$b_1=0$ のもとで，



$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}b_n\ \cdots\cdots\cdots①$$

$$b_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}c_n\ \cdots\cdots\cdots②$$

$$c_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}c_n\ \cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$a_n+b_n+c_n=1$ に注意すると，②から，

$$b_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+c_n)=\frac{1}{2}(1-b_n)=-\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}\ \cdots\cdots\cdots④$$

④を $b_{n+1}-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{2}\left(b_n-\dfrac{1}{3}\right)$ と変形して，

$$b_n-\frac{1}{3}=\left(b_1-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(0-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって，n 回後に中央にある確率 b_n は，$b_n=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ である。

(2)　最初に右端にあった玉が，与えられた操作を n 回繰り返した後，左端，中央，右端のある確率を，(1)と同様に，それぞれ a_n，b_n，c_n とおく。

すると，①②③が成り立ち，$a_1=0$，$b_1=c_1=\dfrac{1}{2}$ のもとで，④から，

$$b_n-\frac{1}{3}=\left(b_1-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

これより，$b_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ となり，③に代入すると，

$$c_{n+1}=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{2}c_n=\frac{1}{2}c_n+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

ここで，⑤を満たす 1 つの数列を $c_n=\alpha+\beta\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$（$\alpha$，$\beta$ は定数）とおくと，

$$\alpha+\beta\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{1}{2}\left\{\alpha+\beta\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

すると，$\alpha=\dfrac{1}{2}\alpha+\dfrac{1}{6}$ かつ $-\dfrac{1}{2}\beta=\dfrac{1}{2}\beta-\dfrac{1}{6}$ となり，$(\alpha,\ \beta)=\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{6}\right)$ なので，

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

⑤⑥から，$c_{n+1}-\left\{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}=\dfrac{1}{2}\left[c_n-\left\{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}\right]$ となるので，

$$c_n-\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}=\left[c_1-\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^1\right\}\right]\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

© 電送数学舎

よって，n 回後に右端にある確率 c_n は，$c_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ である。

［解 説］

漸化式を立式するのが有効な確率の問題です。なお，漸化式⑤は普通に解いたのですが，両辺に 2^{n+1} をかけるという方法でも構いません。詳しくは「ピンポイント レクチャー」を参照してください。

© 電送数学舎

2

問題のページへ

(1)　$\vec{a}=(2,\ 1,\ 1)$，$\vec{b}=(2,\ s,\ t)$，$\vec{c}=(p,\ q,\ 2)$ に対し，条件(i)から $|\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2$ より，

$$4+1+1=4+s^2+t^2,\ s^2+t^2=2\cdots\cdots\cdots①$$

また，条件(ii)から $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60°$ より，$4+s+t=\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}\cdot\frac{1}{2}$ となり，

$$s+t=-1\cdots\cdots\cdots②$$

さらに，条件(iii)から $\vec{a}\cdot\vec{c}=0$ かつ $\vec{b}\cdot\vec{c}=0$ より，

$$2p+q+2=0\cdots\cdots\cdots③,\ 2p+sq+2t=0\cdots\cdots\cdots④$$

①②より，$s^2+(-1-s)^2=2$ から，$2s^2+2s-1=0$ となり，

$$s=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2},\ t=\frac{-1\mp\sqrt{3}}{2}$$ （以下，複号同順）

③④より，$(s-1)q+2t-2=0$ となり，

$$q=\frac{-2t+2}{s-1}=\frac{2(3\pm\sqrt{3})}{-3\pm\sqrt{3}}=-\frac{2(3\pm\sqrt{3})^2}{6}=-4\mp2\sqrt{3}$$

$$p=\frac{1}{2}(4\pm2\sqrt{3}-2)=1\pm\sqrt{3}$$

(2)　2^n が m 桁の整数で，最上位の桁の数字が 1 であるとすると，

$$10^{m-1}\leqq 2^n<2\times10^{m-1}\cdots\cdots\cdots ⓐ$$

ここで，各辺に対数をとると，$\log_2 10^{m-1}\leqq\log_2 2^n<\log_2(2\times10^{m-1})$

$$(m-1)\log_2 10\leqq n<1+(m-1)\log_2 10\cdots\cdots\cdots ⓑ$$

ⓑより，どんな m に対してもⓐを満たす整数 n が 1 つずつ存在する。

すると，2^0，2^1，…，2^n の中に，最上位の桁の数字が 1 であるものの個数は，2^n の桁数 m の値に等しくなる。

そこで，2^n が m 桁の整数とすると，ⓐと同様にして，

$$10^{m-1}\leqq 2^n<10^m,\ m-1\leqq n\log_{10}2<m,\ m\leqq n\log_{10}2+1<m+1$$

以上より，2^0，2^1，…，2^n の中で，最上位の桁の数字が 1 であるものの個数は，

$$[\log_{10}2+1]=[\log_{10}2]+1$$

［解　説］

(1)はベクトルの成分計算，(2)は整数問題の小問 2 題の構成です。(2)については，まず具体的に考え，1 桁の数では $2^0=1$ のみ，2 桁の数では $2^4=16$ のみ，3 桁の数では $2^7=128$ のみ，4 桁の数では $2^{10}=1024$ のみ，…と計算していくと，求める個数は 2^n の桁数であると推測できます。

© 電送数学舎

3　　問題のページへ

$a>0$ に対し，条件より，$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{a}} f(t)\cos(at-2ax)\,dt+1$ ………①

ここで，$\cos(at-2ax)=\cos at\cos 2ax+\sin at\sin 2ax$ より，①から

$$f(x)=\cos 2ax\int_0^{\frac{\pi}{a}} f(t)\cos at\,dt+\sin 2ax\int_0^{\frac{\pi}{a}} f(t)\sin at\,dt+1 \text{ ………②}$$

$A=\int_0^{\frac{\pi}{a}} f(t)\cos at\,dt$ ……③，$B=\int_0^{\frac{\pi}{a}} f(t)\sin at\,dt$ ……④とおくと，②から，

$$f(x)=A\cos 2ax+B\sin 2ax+1 \text{ ………⑤}$$

⑤を③に代入して，$at=u$ とおくと，$adt=du$ となり，

$$\begin{aligned}A&=\int_0^{\frac{\pi}{a}}(A\cos 2at+B\sin 2at+1)\cos at\,dt\\&=\frac{1}{a}\int_0^{\pi}(A\cos 2u+B\sin 2u+1)\cos u\,du\\&=\frac{1}{2a}\int_0^{\pi}\{A(\cos 3u+\cos u)+B(\sin 3u+\sin u)\}du+\frac{1}{a}\Big[\sin u\Big]_0^{\pi}\\&=\frac{1}{2a}\Big[A\Big(\frac{1}{3}\sin 3u+\sin u\Big)-B\Big(\frac{1}{3}\cos 3u+\cos u\Big)\Big]_0^{\pi}\\&=-\frac{B}{2a}\Big(-\frac{2}{3}-2\Big)=\frac{4B}{3a} \text{ ………⑥}\end{aligned}$$

⑤を④に代入して，同様に，$at=u$ とおくと，

$$\begin{aligned}B&=\frac{1}{a}\int_0^{\pi}(A\cos 2u+B\sin 2u+1)\sin u\,du\\&=\frac{1}{2a}\int_0^{\pi}\{A(\sin 3u-\sin u)-B(\cos 3u-\cos u)\}du-\frac{1}{a}\Big[\cos u\Big]_0^{\pi}\\&=\frac{1}{2a}\Big[-A\Big(\frac{1}{3}\cos 3u-\cos u\Big)-B\Big(\frac{1}{3}\sin 3u-\sin u\Big)\Big]_0^{\pi}+\frac{2}{a}\\&=-\frac{A}{2a}\Big(-\frac{2}{3}+2\Big)+\frac{2}{a}=-\frac{2A}{3a}+\frac{2}{a} \text{ ………⑦}\end{aligned}$$

⑥⑦より，$B=-\frac{2}{3a}\cdot\frac{4}{3a}B+\frac{2}{a}$ から，$(9a^2+8)B=18a$ となり，

$$B=\frac{18a}{9a^2+8},\quad A=\frac{4}{3a}\cdot\frac{18a}{9a^2+8}=\frac{24}{9a^2+8}$$

⑤に代入すると，$f(x)=\frac{6}{9a^2+8}(4\cos 2ax+3a\sin 2ax)+1$ である。

［解　説］

いわゆる置き換え型の積分方程式です。方針はストレートに決まりますが，計算はやや難です。

© 電送数学舎

4

問題のページへ

(1)　2 回微分可能な関数 $f(x)$ に対して，$t>0$ のとき，$0 \leqq x \leqq t$ において平均値の定理を適用すると，

$$\frac{f(t)-f(0)}{t}=f'(c)\quad(0<c<t)\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$f''(x)<0$ より $f'(x)$ は単調に減少し，$f'(t)<f'(c)<f'(0)\cdots\cdots\cdots②$

①②より，$f'(t)<\dfrac{f(t)-f(0)}{t}<f'(0)$ となり，

$$f(0)+f'(t)t<f(t)<f(0)+f'(0)t\cdots\cdots\cdots③$$

また，$t=0$ のとき $f(0)+f'(t)t=f(t)=f(0)+f'(0)t$ から，$t \geqq 0$ のとき，

$$f(0)+f'(t)t \leqq f(t) \leqq f(0)+f'(0)t$$

(2)　$t>0$ のとき，$0 \leqq u \leqq t$ において，③の各辺を積分すると，

$$\int_0^t \{f(0)+f'(u)u\}du<\int_0^t f(u)du<\int_0^t \{f(0)+f'(0)u\}du\cdots\cdots\cdots④$$

すると，部分積分を用いて，

$$\int_0^t \{f(0)+f'(u)u\}du=f(0)\big[\,u\,\big]_0^t+\big[\,f(u)u\,\big]_0^t-\int_0^t f(u)du$$

$$=f(0)t+f(t)t-\int_0^t f(u)du$$

④の左側の不等式は，$\dfrac{f(0)t+f(t)t}{2}<\displaystyle\int_0^t f(u)du$ となる。

また，$\displaystyle\int_0^t \{f(0)+f'(0)u\}du=f(0)t+\frac{f'(0)}{2}t^2$ と合わせると，④は，

$$\frac{f(0)t+f(t)t}{2}<\int_0^t f(u)du<f(0)t+\frac{f'(0)}{2}t^2$$

なお，$t=0$ のとき，$\dfrac{f(0)t+f(t)t}{2}=\displaystyle\int_0^t f(u)du=f(0)t+\frac{f'(0)}{2}t^2$ から，

$$\frac{f(0)t+f(t)t}{2} \leqq \int_0^t f(u)du \leqq f(0)t+\frac{f'(0)}{2}t^2\quad(t \geqq 0)$$

［解　説］

平均値の定理を利用する基本的な問題です。解の流れもスムーズです。

© 電送数学舎

5

問題のページへ

すべての実数 x, y に対して，$\dfrac{1}{1+x^2+(y-x)^2} \leqq \dfrac{a}{1+x^2+y^2}$ ……①より，

$$a \geqq \frac{1+x^2+y^2}{1+x^2+(y-x)^2} \cdots\cdots\cdots ②$$

まず，$z = y-x$ とおくと，②より，すべての実数 x, z に対して，

$$a \geqq \frac{1+x^2+(x+z)^2}{1+x^2+z^2} \cdots\cdots\cdots ③$$

ここで，$P = \dfrac{1+x^2+(x+z)^2}{1+x^2+z^2}$ とおき，P のとり得る範囲を求めることより，③を満たす a の値の範囲を求める。

さて，$x=z=0$ のときは $P=1$ となり，$x \neq 0$ または $z \neq 0$ のときは，r，θ を $r>0$，$0 \leqq \theta < 2\pi$ を満たす任意の実数とし，$x = r\cos\theta$，$z = r\sin\theta$ とおくと，

$$P = \frac{1+x^2+(x+z)^2}{1+x^2+z^2} = \frac{1+r^2\cos^2\theta + r^2(\cos\theta+\sin\theta)^2}{1+r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}$$

$$= \frac{1+r^2(1+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta)}{1+r^2} = \frac{2+r^2(3+\cos 2\theta+2\sin 2\theta)}{2(1+r^2)}$$

そこで，$f(\theta) = 3+\cos 2\theta + 2\sin 2\theta$ とおくと，

$$f(\theta) = 3+\sqrt{5}\sin(2\theta+\alpha) \quad \left(\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}},\ \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

よって，$\dfrac{2+(3-\sqrt{5})r^2}{2(1+r^2)} \leqq P \leqq \dfrac{2+(3+\sqrt{5})r^2}{2(1+r^2)}$ ………④

さらに，$g(r) = \dfrac{2+(3+\sqrt{5})r^2}{2(1+r^2)}$ とおくと，$g(r) = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2(1+r^2)}$

すると，$r^2 > 0$ において $g(r) < \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ であり，④から $P < \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ となる。

よって，$1 < \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ から，すべての実数 x，z に対して③を満たす a の値の範囲，すなわちすべての実数 x, y に対して不等式①が成り立つ a の値の範囲は，

$$a \geqq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

［解　説］

P のとり得る値の範囲を求める問題ですが，最初は必要条件を求めて十分性の確認と考えましたが，うまくいきません。そこで，1 文字固定の考え方を採用し，式の形をみて三角関数を導入しました。なお，文字の置き換えは，分母を単純にした方がよいだろうと予想したからです。

© 電送数学舎