

1

解答解説のページへ

座標平面上の点  $O(0, 0)$ ,  $A(a_1, a_2)$ ,  $B(b_1, b_2)$ ,  $C(b_2, -b_1)$  を考える。さらに,  $0 \leq \theta_1 \leq \pi$ ,  $0 \leq \theta_2 \leq \pi$  に対し,  $D(a_1 \cos \theta_1 - a_2 \sin \theta_1, a_1 \sin \theta_1 + a_2 \cos \theta_1)$ ,  $E(b_1 \cos \theta_2 - b_2 \sin \theta_2, b_1 \sin \theta_2 + b_2 \cos \theta_2)$  とおく。

(1)  $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OD}|$  を示せ。

(2)  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$  かつ  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OE} \neq 0$  であるとする。  $\theta_1 = \frac{\pi}{7}$  であるとき,  $\theta_2$

を求めよ。

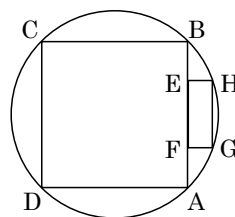
(3)  $\triangle OAB$  の外接円の半径を  $r_1$  とし,  $\triangle ODE$  の外接円の半径を  $r_2$  とする。また,  $\triangle OAB$  の面積を  $S$  とする。  $AB : DE = 2 : 3$  であるとき,  $\triangle ODE$  の面積を,  $S, r_1, r_2$  で表せ。なお, 3 点  $O, A, B$  は同一直線上にないものとし, 3 点  $O, D, E$  も同一直線上にないものとする。

2

半径が $\sqrt{2}$ の円に正方形  $ABCD$  が内接している。辺  $AB$  上の異なる 2 点  $E, F$  と、短い方の弧  $AB$  上の異なる 2 点  $G, H$  を、四角形  $EFGH$  が長方形となるようにとる。

- (1) 長方形  $EFGH$  が正方形のとき、その 1 辺の長さを求めよ。
- (2) 長方形  $EFGH$  の面積が最大になるときの辺  $FG$  の長さを求めよ。

解答解説のページへ



3

解答解説のページへ

$f(x) = 2xe^{-x^2}$  とする。  $a > 0$  に対し、曲線  $y = f(x)$  と直線  $x = a$  および  $x$  軸で囲まれた領域の面積を  $S(a)$  とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) 関数  $y = f(x)$  が最大値をとる  $x$  の値  $p$  を求めよ。
- (2) 極限  $k = \lim_{a \rightarrow \infty} S(a)$  の値を求めよ。
- (3) (1) で求めた  $p$  に対し、  $b > p$  が成り立つとする。点  $(b, f(b))$  における曲線  $y = f(x)$  の接線と、直線  $x = b$  および  $x$  軸で囲まれた領域の面積を  $T(b)$  とする。  
(2) で求めた  $k$  に対し、  $S(b) + T(b) = k$  となるように、  $b$  の値を定めよ。

4

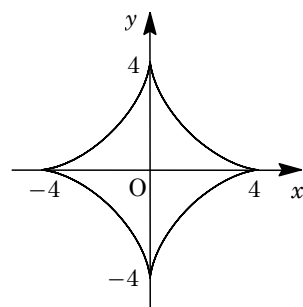
$0 \leq t \leq 2\pi$  において、媒介変数  $t$  で表された曲線

$$x = 3\cos t + \cos 3t, \quad y = 3\sin t - \sin 3t$$

を  $C$  とする。

- (1)  $C$  の長さを求めよ。
- (2)  $C$  で囲まれた領域の面積を求めよ。

[解答解説のページへ](#)



5

解答解説のページへ

数列  $\{a_n\}$  を条件  $a_1 = -1$ ,  $a_2 = 3$ ,  $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) によって定める。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1)  $a_{n+2} - pa_{n+1} = q(a_{n+1} - pa_n)$  がすべての  $n$  に対して成り立つような  $p, q$  を求めよ。
- (2) 数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ。
- (3)  $r$  を正の実数とし、数列  $\{b_n\}$  を条件  $b_1 = r \frac{1}{a_1}$ ,  $\frac{b_{n+1}}{b_n} = r \frac{a_n}{a_{n+1}}$  によって定める。

このとき、極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  を求めよ。

1

問題のページへ

- (1) 点
- $O(0, 0)$
- ,
- $A(a_1, a_2)$
- ,
- $D(a_1 \cos \theta_1 - a_2 \sin \theta_1, a_1 \sin \theta_1 + a_2 \cos \theta_1)$
- に対し,

$$\begin{aligned} |\overline{OD}|^2 &= (a_1 \cos \theta_1 - a_2 \sin \theta_1)^2 + (a_1 \sin \theta_1 + a_2 \cos \theta_1)^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2)(\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1) + 2a_1 a_2 (-\cos \theta_1 \sin \theta_1 + \sin \theta_1 \cos \theta_1) \\ &= a_1^2 + a_2^2 = |\overline{OA}|^2 \end{aligned}$$

よって,  $|\overline{OA}| = |\overline{OD}|$  である。

- (2)
- $B(b_1, b_2)$
- ,
- $C(b_2, -b_1)$
- ,
- $E(b_1 \cos \theta_2 - b_2 \sin \theta_2, b_1 \sin \theta_2 + b_2 \cos \theta_2)$
- に対し,

$$\overline{OA} \cdot \overline{OC} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

また,  $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = 2\overline{OD} \cdot \overline{OE} \neq 0$  から,  $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = a_1 b_1 + a_2 b_2 \neq 0$ 

$$\begin{aligned} \overline{OD} \cdot \overline{OE} &= a_1 b_1 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) - a_1 b_2 (\cos \theta_1 \sin \theta_2 - \sin \theta_1 \cos \theta_2) \\ &\quad - a_2 b_1 (\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2) + a_2 b_2 (\sin \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_2) \\ &= (a_1 b_1 + a_2 b_2) \cos(\theta_1 - \theta_2) + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \sin(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned}$$

すると,  $a_1 b_1 + a_2 b_2 = 2(a_1 b_1 + a_2 b_2) \cos(\theta_1 - \theta_2) + 2(a_1 b_2 - a_2 b_1) \sin(\theta_1 - \theta_2)$  より,

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2) \{2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - 1\} + 2(a_1 b_2 - a_2 b_1) \sin(\theta_1 - \theta_2) = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①②より,  $(a_1 b_1 + a_2 b_2) \{2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - 1\} = 0$  となり,  $a_1 b_1 + a_2 b_2 \neq 0$  から,

$$2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - 1 = 0, \quad \cos(\theta_1 - \theta_2) = \frac{1}{2} \cdots \cdots \textcircled{3}$$

ここで,  $\theta_1 = \frac{\pi}{7}$ ,  $0 \leq \theta_2 \leq \pi$  から,  $-\frac{6}{7}\pi \leq \theta_1 - \theta_2 \leq \frac{\pi}{7}$  となり, ③より,

$$\theta_1 - \theta_2 = -\frac{\pi}{3}, \quad \theta_2 = \theta_1 + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{7} + \frac{\pi}{3} = \frac{10}{21}\pi$$

- (3)
- $\triangle OAB$
- ,
- $\triangle ODE$
- の外接円の半径をそれぞれ
- $r_1$
- ,
- $r_2$
- とし, さらに
- $\angle AOB = \varphi_1$
- ,
- $\angle DOE = \varphi_2$
- とおくと, 正弦定理より,

$$AB = 2r_1 \sin \varphi_1, \quad DE = 2r_2 \sin \varphi_2$$

条件より  $AB : DE = 2 : 3$  なので  $DE = \frac{3}{2}AB$  となり,  $r_2 \sin \varphi_2 = \frac{3}{2}r_1 \sin \varphi_1 \cdots \cdots \textcircled{4}$ さて,  $\triangle OAB$ ,  $\triangle ODE$  の面積をそれぞれ  $S$ ,  $T$  とおくと,

$$S = \frac{1}{2} \overline{OA} \cdot \overline{OB} \sin \varphi_1, \quad T = \frac{1}{2} \overline{OD} \cdot \overline{OE} \sin \varphi_2 \cdots \cdots \textcircled{5}$$

ここで, (1)より  $OA = OD$  となり, 同様にして  $OB = OE$  となるので, ④⑤から,

$$T = \frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_1} S = \frac{3}{2} r_1 \cdot \frac{1}{r_2} S = \frac{3r_1}{2r_2} S$$

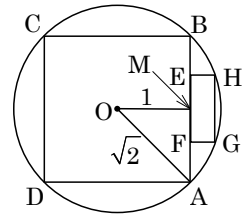
## [解説]

点と座標に関する総合問題です。なお, 点  $D$  は点  $A$  を原点まわりに  $\theta_1$ , 点  $E$  は点  $B$  を原点まわりに  $\theta_2$  だけ回転した点として設定されています。

2

問題のページへ

- (1) 半径  $\sqrt{2}$  の円の中心を  $O$ 、正方形の辺  $AB$  の中点を  $M$  とおき、  
 $FM = EM = x$  とする。



ここで、長方形  $EFGH$  が正方形のとき、 $FG = 2x$  となるので、  
 $OG = \sqrt{2}$  すなわち  $(OM + FG)^2 + FM^2 = (\sqrt{2})^2$  から、

$$(1 + 2x)^2 + x^2 = 2, \quad 5x^2 + 4x - 1 = 0$$

すると、 $(5x - 1)(x + 1) = 0$  から  $x = \frac{1}{5}$  となるので、正方形  $EFGH$  の 1 辺の長さは、  
 $2x = \frac{2}{5}$  である。

- (2) (1)と同様に設定して、 $FG = y$  とおくと、 $OG = \sqrt{2}$  から、

$$(1 + y)^2 + x^2 = 2, \quad x^2 = 2 - (1 + y)^2 = 1 - 2y - y^2 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

さて、長方形  $EFGH$  の面積を  $S$  とおくと  $S = 2xy$  となり、 $\textcircled{1}$ より、

$$S^2 = 4x^2y^2 = 4y^2(1 - 2y - y^2) = -4(y^4 + 2y^3 - y^2)$$

ここで、 $\textcircled{1}$ から、 $2 - (1 + y)^2 > 0$  なので、 $0 < y < \sqrt{2} - 1$

そして、 $f(y) = -4(y^4 + 2y^3 - y^2)$  とおくと、

$$f'(y) = -4(4y^3 + 6y^2 - 2y) \\ = -8y(2y^2 + 3y - 1)$$

すると、 $f(y)$  の増減は右表のよ

うになり、 $y = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}$  のとき最

$y$	0	...	$\frac{-3 + \sqrt{17}}{4}$	...	$\sqrt{2} - 1$
$f'(y)$	0	+	0	-	
$f(y)$		↗		↘	

大値をとる。すなわち、 $FG = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}$  のとき長方形  $EFGH$  の面積は最大になる。

[解説]

図形量の最大・最小問題です。なお、座標系を設定する方法もあります。

3

問題のページへ

- (1)  $f(x) = 2xe^{-x^2}$  に対して,  $x \geq 0$  のとき  $f(x) \geq 0$ ,  $x < 0$  のとき  $f(x) < 0$  であるので,  $f(x)$  が最大値をとる  $x$  は  $x \geq 0$  となり,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2e^{-x^2} + 2xe^{-x^2}(-2x) \\ &= 2(1-2x^2)e^{-x^2} \end{aligned}$$

これより,  $x \geq 0$  における  $f(x)$  の増減は右表のようになり,  $f(x)$  は  $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$  で最大値をとる。

$x$	0	...	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	0	↗		↘

すなわち,  $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$  である。

- (2) 曲線  $y = f(x)$  と直線  $x = a$  および  $x$  軸で囲まれた領域の面積  $S(a)$  は,

$$S(a) = \int_0^a 2xe^{-x^2} dx = [-e^{-x^2}]_0^a = 1 - e^{-a^2}$$

よって,  $k = \lim_{a \rightarrow \infty} S(a) = 1$  である。

- (3)  $b > \frac{1}{\sqrt{2}}$  のとき, (2) から,  $S(b) = 1 - e^{-b^2}$

また, 点  $(b, f(b))$  における接線の方程式は,

$$y - 2be^{-b^2} = 2(1 - 2b^2)e^{-b^2}(x - b)$$

$x$  軸との交点は  $y = 0$  とおくと,

$$-2be^{-b^2} = 2(1 - 2b^2)e^{-b^2}(x - b)$$

よって,  $-b = (1 - 2b^2)(x - b)$  から  $x = b + \frac{b}{2b^2 - 1}$  となる。

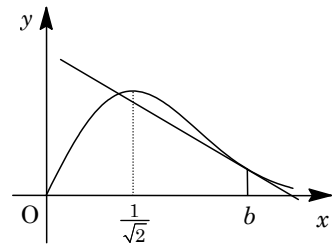
これより, 接線と直線  $x = b$  および  $x$  軸で囲まれた領域の面積  $T(b)$  は,

$$T(b) = \frac{1}{2} \left( b + \frac{b}{2b^2 - 1} - b \right) \cdot 2be^{-b^2} = \frac{b^2}{2b^2 - 1} e^{-b^2}$$

条件より,  $S(b) + T(b) = 1$  なので,  $1 - e^{-b^2} + \frac{b^2}{2b^2 - 1} e^{-b^2} = 1$  となり,

$$-1 + \frac{b^2}{2b^2 - 1} = 0, \quad -b^2 + 1 = 0$$

すると,  $b > \frac{1}{\sqrt{2}}$  から,  $b = 1$  となる。



### [解説]

微積分の基本問題です。計算量も少なめです。



4

問題のページへ

- (1) 曲線
- $C$
- の媒介変数表示は,
- $0 \leq t \leq 2\pi$
- において,

$$x = 3\cos t + \cos 3t, \quad y = 3\sin t - \sin 3t$$

ここで, 3 倍角の公式を適用すると,

$$x = 4\cos^3 t, \quad y = 4\sin^3 t$$

$$\frac{dx}{dt} = -12\cos^2 t \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = 12\sin^2 t \cos t$$

さて, 曲線  $C$  は  $x$  軸,  $y$  軸について対称なので,  $C$  の長さを  $L$  とすると,

$$\begin{aligned} L &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{12^2 \cos^4 t \sin^2 t + 12^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt \\ &= 48 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t \sin^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)} dt = 48 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t dt \\ &= 48 \left[ \frac{1}{2} \sin^2 t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 24 \end{aligned}$$

- (2)
- $C$
- で囲まれた領域の面積を
- $S$
- とすると, 対称性から,

$$\begin{aligned} S &= 4 \int_0^4 y dx = 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 4\sin^3 t (-12\cos^2 t \sin t) dt = 192 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t (1 - \sin^2 t) dt \\ &= 192 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 t - \sin^6 t) dt \end{aligned}$$

ここで,  $n$  を 0 以上の整数として,  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$  とおくと,  $I_0 = \frac{\pi}{2}$  で,

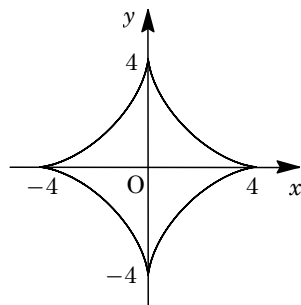
$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \sin^n t dt = -\left[ \cos t \sin^n t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin^{n-1} t \cos t dt \\ &= n \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t) \sin^{n-1} t dt = n \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n-1} t - \sin^{n+1} t) dt \\ &= n(I_{n-1} - I_{n+1}) \end{aligned}$$

すると,  $(n+1)I_{n+1} = nI_{n-1}$  から,  $I_{n+1} = \frac{n}{n+1} I_{n-1}$  となり,

$$S = 192(I_4 - I_6) = 192\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 192 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{6} = 6\pi$$

## [解説]

問題文の図から, 曲線がアステロイドと予測できますので, まず 3 倍角の公式を用いて変形しています。ただ, (2)ではこの変形をしない方がよかったかもしれません。



5

問題のページへ

(1)  $a_1 = -1, a_2 = 3, a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n (n=1, 2, \dots)$  ……①に対し, ①を変形し,

$$a_{n+2} - pa_{n+1} = q(a_{n+1} - pa_n), a_{n+2} = (p+q)a_{n+1} - pq a_n \dots\dots\dots②$$

すべての  $n$  に対して, ①②が一致することから,

$$p+q=5, pq=6$$

すると,  $p, q$  は 2 次方程式  $x^2 - 5x + 6 = 0$  の 2 つの解となり,  $x = 2, 3$  から,

$$(p, q) = (2, 3), (3, 2)$$

(2)  $(p, q) = (2, 3)$  のとき, ②から  $a_{n+2} - 2a_{n+1} = 3(a_{n+1} - 2a_n)$  となり,

$$a_{n+1} - 2a_n = (a_2 - 2a_1)3^{n-1} = 5 \cdot 3^{n-1} \dots\dots\dots③$$

また,  $(p, q) = (3, 2)$  のとき, ②から  $a_{n+2} - 3a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 3a_n)$  となり,

$$a_{n+1} - 3a_n = (a_2 - 3a_1)2^{n-1} = 6 \cdot 2^{n-1} \dots\dots\dots④$$

③④より,  $a_n = 5 \cdot 3^{n-1} - 6 \cdot 2^{n-1}$ (3)  $r > 0$  として,  $b_1 = r \frac{1}{a_1} = -r, \frac{b_{n+1}}{b_n} = r \frac{a_n}{a_{n+1}} \dots\dots\dots⑤$ ここで,  $r \frac{a_n}{a_{n+1}} = c_n$  とおくと, ⑤から  $b_{n+1} = c_n b_n$  となるので,  $n \geq 2$  で,

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 \cdot c_1 \cdot c_2 \cdots c_{n-1} = -r \cdot r \frac{a_1}{a_2} \cdot r \frac{a_2}{a_3} \cdots r \frac{a_{n-1}}{a_n} = -r^n \frac{a_1}{a_n} \\ &= -r^n \frac{-1}{5 \cdot 3^{n-1} - 6 \cdot 2^{n-1}} = \frac{r^n}{3^{n-1} \left\{ 5 - 6 \left( \frac{2}{3} \right)^{n-1} \right\}} = \frac{r}{5 - 6 \left( \frac{2}{3} \right)^{n-1}} \cdot \left( \frac{r}{3} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

(i)  $0 < \frac{r}{3} < 1 (0 < r < 3)$  のとき  $n \rightarrow \infty$  のとき  $\left( \frac{r}{3} \right)^{n-1} \rightarrow 0$  より,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ (ii)  $\frac{r}{3} = 1 (r = 3)$  のとき  $n \rightarrow \infty$  のとき  $\left( \frac{r}{3} \right)^{n-1} \rightarrow 1$  より,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{r}{5} = \frac{3}{5}$ (iii)  $\frac{r}{3} > 1 (r > 3)$  のとき  $n \rightarrow \infty$  のとき  $\left( \frac{r}{3} \right)^{n-1} \rightarrow \infty$  より,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ 

## 【解説】

漸化式と極限の典型題です。(3)の  $b_n = b_1 \cdot c_1 \cdot c_2 \cdots c_{n-1} (n \geq 2)$  については「ピンポイント レクチャー」を参照してください。