$\boxed{1}$　解答解説のページへ

$0 < t < 3$ を満たす実数 t に対し，平面上の相異なる 4 点 O，A，B，C を次の条件(a)，(b)を満たすようにとる。

(a)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角を θ とするとき，$\tan\theta = \dfrac{1}{t+1}$

(b)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = t-3$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 0$

線分 OA を $t:1$ に内分する点を D とし，△OCD の面積を $S(t)$ とする。$S(t)$ の最大値を求めよ。

2

解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$は，$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{7a_n-1}{4a_n+3}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$を満たすとする。

(1)　$n=1,\ 2,\ \cdots\cdots$に対し，$a_n>\dfrac{1}{2}$であることを示せ。

(2)　$b_n=\dfrac{2}{2a_n-1}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$で定まる数列$\{b_n\}$の一般項を求めよ。

3

解答解説のページへ

a を実数とする。座標平面上の曲線 $C : y = e^x(x^2 + 2x)$ と直線 $l : y = a$ について，次の問いに答えよ。

(1) C と l がちょうど 2 点を共有するような a が満たす条件を求めよ。ただし，$\lim_{x \to -\infty} e^x(x^2 + 2x) = 0$ を用いてよい。

(2) (1)で求めた条件を満たす a に対し，C と l で囲まれる領域と，不等式 $x \leqq 0$ が表す領域との共通部分の面積を $S(a)$ とおく。$S(a)$ の最大値と，そのときの a の値を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

θ が $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，座標平面上の直線 $y=(\sin\theta)x+\cos\theta$ 上の点 $(x,\ y)$ について，不等式 $-|x| \leqq y \leqq \sqrt{x^2+1}$ が成り立つことを示せ。

5

解答解説のページへ

M は有限個の複素数からなる集合で,

(a)　$1 \in M$, $0 \notin M$

(b)　$z,\ w \in M$ ならば $zw \in M$

を満たすとする。$\alpha \in M$ とするとき, 次の問いに答えよ。

(1)　$\alpha^n = 1$ となる自然数 n が存在することを示せ。

(2)　m を $\alpha^m = 1$ を満たす自然数のうち最小のものとする。このとき

$$\cos\frac{2\pi}{m} + i\sin\frac{2\pi}{m} \in M$$

であることを示せ。

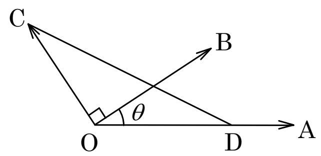
1

問題のページへ

条件(a)から，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角 θ に対し，$\tan\theta=\dfrac{1}{t+1}$ ………①

条件(b)から，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=t-3$ ……②，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$ ……③

ここで，$0<t<3$ より，①から $\theta=\angle\mathrm{AOB}$ は鋭角，②から $\angle\mathrm{AOC}$ は鈍角となり，③より $\angle\mathrm{BOC}$ は直角なので，



$$\angle\mathrm{AOC}=\theta+\frac{\pi}{2}$$

すると，②より，$\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OC}\cdot\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=t-3$

$$-\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OC}\cdot\sin\theta=t-3,\ \mathrm{OA}\cdot\mathrm{OC}=\frac{3-t}{\sin\theta}\ ………④$$

さて，線分 OA を $t:1$ に内分する点 D に対して，△OCD の面積 $S(t)$ は，

$$S(t)=\frac{1}{2}\mathrm{OD}\cdot\mathrm{OC}\cdot\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{t+1}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OC}\cdot\cos\theta$$

④を代入すると，$S(t)=\dfrac{t}{2(t+1)}\cdot\dfrac{3-t}{\sin\theta}\cdot\cos\theta=\dfrac{t(3-t)}{2(t+1)}\cdot\dfrac{1}{\tan\theta}$ となり，①から，

$$S(t)=\frac{t(3-t)}{2(t+1)}\cdot(t+1)=-\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{2}t=-\frac{1}{2}\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{8}$$

よって，$S(t)$ は $t=\dfrac{3}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{9}{8}$ をとる。

［解　説］

ベクトルの内積が絡んだ形式をしていますが，内容は三角比の応用です。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　数列$\{a_n\}$が$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{7a_n-1}{4a_n+3}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$で定義されているとき，すべての自然数nに対して，$a_n>\dfrac{1}{2}$を数学的帰納法によって示す。

(i)　$n=1$のとき　$a_1=1>\dfrac{1}{2}$より成立している。

(ii)　$n=k$のとき　$a_k>\dfrac{1}{2}$と仮定する。

$$a_{k+1}-\frac{1}{2}=\frac{7a_k-1}{4a_k+3}-\frac{1}{2}=\frac{14a_k-2-4a_k-3}{2(4a_k+3)}=\frac{5(2a_k-1)}{2(4a_k+3)}>0$$

$n=k+1$のときも成立する。

(i)(ii)より，すべての自然数nに対して，$a_n>\dfrac{1}{2}$である。

(2)　$b_n=\dfrac{2}{2a_n-1}$のとき，$b_1=\dfrac{2}{2a_1-1}=2$である。

さて，(1)から，$\dfrac{2a_{n+1}-1}{2}=\dfrac{5(2a_n-1)}{2(4a_n+3)}$となるので，

$$b_{n+1}=\frac{2}{2a_{n+1}-1}=\frac{2(4a_n+3)}{5(2a_n-1)}=\frac{2}{5}\cdot\frac{2(2a_n-1)+5}{2a_n-1}=\frac{2}{5}\left(2+\frac{5}{2a_n-1}\right)$$

$$=\frac{4}{5}+\frac{2}{2a_n-1}=\frac{4}{5}+b_n$$

よって，$b_n=b_1+\dfrac{4}{5}(n-1)=2+\dfrac{4}{5}n-\dfrac{4}{5}=\dfrac{4}{5}n+\dfrac{6}{5}$である。

［解　説］

誘導つきの漸化式の問題です。(2)は(1)のプロセスに注目して式変形をしています。

3

問題のページへ

(1)　曲線 $C: y = e^x(x^2+2x)$ に対して，

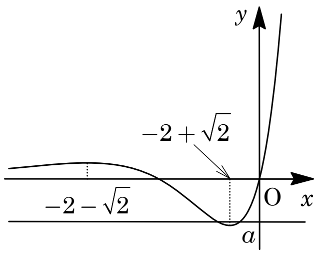
$$y' = e^x(x^2+2x) + e^x(2x+2) = e^x(x^2+4x+2)$$

$y'=0$ とすると $x = -2 \pm \sqrt{2}$ となり，y の増減は右表のようになる。

x	$\cdots$	$-2-\sqrt{2}$	$\cdots$	$-2+\sqrt{2}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

ここで，$x=-2-\sqrt{2}$ のとき $y=(2+2\sqrt{2})e^{-2-\sqrt{2}}$，$x=-2+\sqrt{2}$ のとき $y=(2-2\sqrt{2})e^{-2+\sqrt{2}}$ となり，

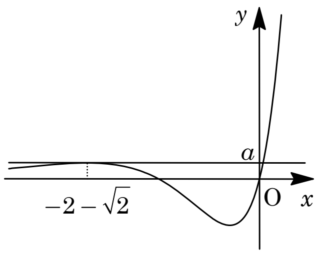
$$\lim_{x\to-\infty} y = 0,\quad \lim_{x\to\infty} y = \infty$$



すると，曲線 C の概形は右図のようになり，直線 $l: y = a$ と 2 点を共有するような a の条件は,

$$a = (2+2\sqrt{2})e^{-2-\sqrt{2}},\quad (2-2\sqrt{2})e^{-2+\sqrt{2}} < a \leqq 0$$

(2)　(1)のとき，C と l で囲まれる領域と，不等式 $x \leqq 0$ が表す領域との共通部分の面積 $S(a)$ が最大となるのは，明らかに $a = (2+2\sqrt{2})e^{-2-\sqrt{2}}$ のときである。



ここで，$\alpha = -2-\sqrt{2}$ とおくと，$a = (-\alpha+\sqrt{2})e^{\alpha}$ となり，$S(a)$ の最大値 $S(\alpha)$ は,

$$\begin{aligned}
S(\alpha) &= \int_{\alpha}^{0} \{(-\alpha+\sqrt{2})e^{\alpha} - e^x(x^2+2x)\}dx \\
&= -\alpha(-\alpha+\sqrt{2})e^{\alpha} - \left[e^x(x^2+2x)\right]_{\alpha}^{0} + 2\int_{\alpha}^{0} e^x(x+1)dx \\
&= \alpha(\alpha-\sqrt{2})e^{\alpha} + e^{\alpha}(\alpha^2+2\alpha) + 2\left[e^x(x+1)\right]_{\alpha}^{0} - 2\int_{\alpha}^{0} e^x dx \\
&= (2\alpha^2+2\alpha-\sqrt{2}\alpha)e^{\alpha} + 2 - 2e^{\alpha}(\alpha+1) - 2(1-e^{\alpha}) = (2\alpha^2-\sqrt{2}\alpha)e^{\alpha} \\
&= (-4-3\sqrt{2})(-2-\sqrt{2})e^{-2-\sqrt{2}} = (14+10\sqrt{2})e^{-2-\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

［解　説］

微積分の総合問題です。計算はやや複雑ですが，置き換えると少し見通しがよくなります。

$\boxed{4}$ 問題のページへ

直線 $l: y=(\sin\theta)x+\cos\theta$ に対し，$\vec{a}=(1,\ x)$，$\vec{p}=(\cos\theta,\ \sin\theta)$ とおくと，

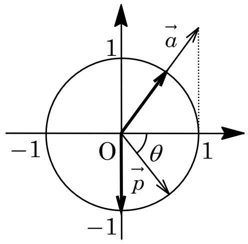
$$l: y=\vec{a}\cdot\vec{p}=|\vec{a}||\vec{p}|\cos\varphi=\sqrt{x^2+1}\cos\varphi \quad (\varphi \text{ は } \vec{a} \text{ と } \vec{p} \text{ のなす角}) \cdots\cdots\cdots(*)$$

さて，θ が $-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ を動くとき，$(*)$の y のとりうる値の範囲を考えると，

(i)　$x\geqq 0$ のとき

右図より，$\vec{a}\cdot\vec{p}$ の値は，$\vec{p}$ が $\vec{a}$ と同じ向き $(\varphi=0)$ のとき最大になり，$\vec{p}=(0,\ -1)$ のとき最小になるので，

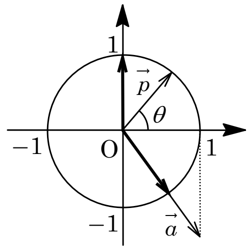
$$1\cdot 0+x\cdot(-1)\leqq\vec{a}\cdot\vec{p}\leqq\sqrt{x^2+1}\cos 0$$
$$-x\leqq y\leqq\sqrt{x^2+1}$$



(ii)　$x<0$ のとき

右図より，$\vec{a}\cdot\vec{p}$ の値は，$\vec{p}$ が $\vec{a}$ と同じ向き $(\varphi=0)$ のとき最大になり，$\vec{p}=(0,\ 1)$ のとき最小になるので，

$$1\cdot 0+x\cdot 1\leqq\vec{a}\cdot\vec{p}\leqq\sqrt{x^2+1}\cos 0$$
$$x\leqq y\leqq\sqrt{x^2+1}$$



(i)(ii)より，まとめると，$-|x|\leqq y\leqq\sqrt{x^2+1}$ である。

［解　説］

直線の通過領域の問題です。いろいろな解法が考えられますが，ここでは $\cos\theta$ と $\sin\theta$ のセット，およびその係数に文字の入っていることに着目して内積を利用しました。なお，本問は結論が与えられていますので，不等式の証明という形での記述も可能です。

5

問題のページへ

(1)　まず，$1\in M$ から $\alpha=1$ のとき，$\alpha^n=1$ となる自然数 n は存在する。

次に，$\alpha\neq1$ のとき，$\alpha\in M$ ならば，(b)より $\alpha\cdot\alpha\in M$ となり，同様にして，

$$\alpha^2\in M,\ \alpha^3\in M,\ \alpha^4\in M,\ \alpha^5\in M,\ \cdots\cdots$$

すなわち，複素数 1，α，α^2，α^3，α^4，α^5，…は，すべて集合 M の要素である。

すると，M の要素は有限個なので，ある k, l $(k<l)$ に対し，$\alpha^k=\alpha^l$ となる。

ここで，$0\notin M$ より $\alpha\neq0$ なので $\alpha^{l-k}=1$ となり，$n=l-k>0$ とおくと，$\alpha^n=1$ である自然数 n が存在することになる。

(2)　条件より，$\alpha\in M$ のとき，$\alpha^m=1$ かつ $\alpha^j\neq1$ $(1\leqq j\leqq m-1)$ である。これより $\alpha\neq1$ として，$1\in M$，$\alpha\in M$ から，m 個の複素数 1，α，α^2，…，α^{m-1} を考える。

まず，ある k, l $(0\leqq k<l\leqq m-1)$ に対し，$\alpha^k=\alpha^l$ とすると，$\alpha\neq0$ から，

$$\alpha^{l-k}=1\quad(0<l-k\leqq m-1)$$

ところが，これは条件に反するので，複素数 1，α，α^2，…，α^{m-1} はすべて異なり，そこで，m 個の要素の集合 $L=\{1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \cdots,\ \alpha^{m-1}\}$ を設定する。

すると，$\alpha^m=1$ より L は積について閉じているので，M の部分集合になる。

さらに，任意の i $(1\leqq i\leqq m-1)$ に対して，$(\alpha^i)^m=(\alpha^m)^i=1$ となるので，L は 1 の m 乗根全体の集合である。

さて，$\beta=\cos\dfrac{2\pi}{m}+i\sin\dfrac{2\pi}{m}$ とおくと，

$$\beta^m=\cos\left(\frac{2\pi}{m}\cdot m\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{m}\cdot m\right)=\cos2\pi+i\sin2\pi=1$$

すると，β は 1 の m 乗根の 1 つであり，$\beta\in L$ すなわち $\beta\in M$ である。

［解　説］

複素数を題材にした論証問題です。昨年，名大で似た問題が出ています。なお，(1)は有名ですが，(2)は天下り的な方法になっていて……。