1

解答解説のページへ

n を 3 以上の整数とする。1, 2, $\cdots$, n の n 個の数から異なる 3 個を選んで，それらを小さい順に a, b, c とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$n=8$ のとき，$a+b=c$ となる 3 個の数の組 $(a,\ b,\ c)$ は何通りあるか。

(2)　一般の n について，$a+b=c$ となる 3 個の数の組 $(a,\ b,\ c)$ は何通りあるか。

2

解答解説のページへ

関数 $f(x)$ は，次を満たすとする。

$$f(x) = x^2 - \frac{3x}{5}\int_0^1 f(t)\,dt + 4$$

曲線 $C : y = f(x)$ と直線 $l : y = mx$ は，x 座標が正の点で接しているとする。

(1) m の値と接点の座標を求めよ。

(2) 直線 $x = 1$，直線 l，および曲線 C で囲まれた領域の面積を求めよ。

$\boxed{3}$ 解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　$a>1$ とする。不等式 $(1+t)^a \leqq K(1+t^a)$ がすべての $t \geqq 0$ に対して成り立つような実数 K の最小値を求めよ。

(2)　$\displaystyle\int_0^{\pi}\left(1+\sqrt[5]{1+\sin x}\right)^{10}dx < 6080$ を示せ。ただし，$\pi < 3.15$ であることを用いてよい。

4

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　2^n-1 が 3 で割り切れるような自然数 n をすべて求めよ。

(2)　n^n-1 が 3 で割り切れるような自然数 n をすべて求めよ。

5

解答解説のページへ

n を自然数，θ を実数とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\cos(n+2)\theta-2\cos\theta\cos(n+1)\theta+\cos n\theta=0$ を示せ。

(2) $\cos\theta=x$ とおくとき，$\cos 5\theta$ を x の式で表せ。

(3) $\cos^2\dfrac{\pi}{10}$ の値を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　1, 2, …, 8 の 8 個の数から異なる 3 個を選んで，それらを小さい順に a, b, c とするとき，$a+b=c$ となるのは $3 \leqq c \leqq 8$ より，

(i)　$c=3$ のとき　$(a,\ b)=(1,\ 2)$

(ii)　$c=4$ のとき　$(a,\ b)=(1,\ 3)$

(iii)　$c=5$ のとき　$(a,\ b)=(1,\ 4),\ (2,\ 3)$

(iv)　$c=6$ のとき　$(a,\ b)=(1,\ 5),\ (2,\ 4)$

(v)　$c=7$ のとき　$(a,\ b)=(1,\ 6),\ (2,\ 5),\ (3,\ 4)$

(vi)　$c=8$ のとき　$(a,\ b)=(1,\ 7),\ (2,\ 6),\ (3,\ 5)$

(i)～(vi)より，$(a,\ b,\ c)$ は $1+1+2+2+3+3=12$ 通りある。

(2)　1, 2, …, n の n 個の数から異なる 3 個を選んで，それらを小さい順に a, b, c とするとき，$a+b=c$ となるのは $3 \leqq c \leqq n$ であり，ここで $k \geqq 1$ として，

(i)　$c=2k+1$ のとき　$(a,\ b)=(1,\ 2k),\ (2,\ 2k-1),\ \cdots,\ (k,\ k+1)$

このときの $(a,\ b,\ c)$ の組の数を N_{2k+1} とすると，$N_{2k+1}=k$ である。

(ii)　$c=2k+2$ のとき　$(a,\ b)=(1,\ 2k+1),\ (2,\ 2k),\ \cdots,\ (k,\ k+2)$

このときの $(a,\ b,\ c)$ の組の数を N_{2k+2} とすると，$N_{2k+2}=k$ である。

さて，求める $(a,\ b,\ c)$ の組の数 N について，n を偶奇に分けて調べる。ここで，$m \geqq 1$ として，$n \geqq 3$ に注意すると，

(I)　n が奇数 $(n=2m+1)$ のとき

$$N=\sum_{k=1}^{m}N_{2k+1}+\sum_{k=1}^{m-1}N_{2k+2}=\sum_{k=1}^{m}k+\sum_{k=1}^{m-1}k=m+2\sum_{k=1}^{m-1}k=m+2\cdot\frac{1}{2}(m-1)m$$
$$=m^2=\frac{1}{4}(n-1)^2\quad(m \geqq 2)$$

なお，この式は $m=1$ $(n=3)$ のときも成立している。

(II)　n が偶数 $(n=2m+2)$ のとき

$$N=\sum_{k=1}^{m}N_{2k+1}+\sum_{k=1}^{m}N_{2k+2}=\sum_{k=1}^{m}k+\sum_{k=1}^{m}k=2\sum_{k=1}^{m}k=2\cdot\frac{1}{2}m(m+1)$$
$$=m(m+1)=\frac{n-2}{2}\cdot\frac{n}{2}=\frac{1}{4}n(n-2)$$

［解　説］

数え上げるタイプの場合の数の問題です。(2)については，一般的な解法で記しました。ただ，時間が不足したときは「帰納的な」処理も……。

2

問題のページへ

(1)　$f(x)=x^2-\dfrac{3x}{5}\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt+4$ に対して，$c=\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ ……①とおくと，

$$f(x)=x^2-\frac{3c}{5}x+4\ \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より，$c=\displaystyle\int_0^1\left(t^2-\frac{3c}{5}t+4\right)dt=\frac{1}{3}-\frac{3c}{5}\cdot\frac{1}{2}+4=\frac{13}{3}-\frac{3}{10}c$ となり，

$$\frac{13}{10}c=\frac{13}{3},\ c=\frac{10}{3}$$

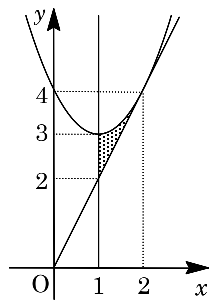
よって，②から，$f(x)=x^2-\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{10}{3}x+4=x^2-2x+4=(x-1)^2+3$ である。

これより，$C: y=x^2-2x+4$ となり，$l: y=mx$ と連立して，

$$x^2-2x+4=mx,\ x^2-(m+2)x+4=0$$

x 座標が正の点で，C と l が接していることより，$D=(m+2)^2-16=0$ かつ $x=\dfrac{m+2}{2}>0$ となり，$m+2=4$ から $m=2$ である。

このとき，接点の x 座標は $x=\dfrac{2+2}{2}=2$ となり，接点の座標は $(2,\ 4)$ である。



(2)　直線 $x=1$，直線 l，および曲線 C で囲まれた領域の面積 S は，

$$S=\int_1^2\{(x-1)^2+3\}dx-\frac{1}{2}(2+4)(2-1)$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-1)^3+3x\right]_1^2-3=\frac{1}{3}+3-3=\frac{1}{3}$$

［解　説］

積分方程式に面積計算を加えた問題です。いずれも基本レベルです。

3

問題のページへ

(1)　すべての $t \geqq 0$ に対して $(1+t)^a \leqq K(1+t^a)$ ……①から，$K \geqq \dfrac{(1+t)^a}{1+t^a}$ として，

$f(t)=\dfrac{(1+t)^a}{1+t^a}$ とおくと，①は $K \geqq f(t)$ となり，

$$f'(t)=\frac{a(1+t)^{a-1}(1+t^a)-(1+t)^a\cdot at^{a-1}}{(1+t^a)^2}=\frac{a(1+t)^{a-1}(1-t^{a-1})}{(1+t^a)^2}$$

すると，$a>1$ から $t \geqq 0$ における $f(t)$ の増減は右表のようになり，最大値は 2^{a-1} である。

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$
$f(t)$	1	$\nearrow$	2^{a-1}	$\searrow$

これより，すべての $t \geqq 0$ に対して①を満たす実数 K の最小値は，2^{a-1} となる。

(2) (1)から，$a>1$ のとき，すべての $t \geqq 0$ に対して $(1+t)^a \leqq 2^{a-1}(1+t^a)$ が成り立ち，ここで $t=\sqrt[5]{1+\sin x} \geqq 0$，$a=10$ とおくと，

$$\left(1+\sqrt[5]{1+\sin x}\right)^{10} \leqq 2^9\{1+(1+\sin x)^2\}=2^9(2+2\sin x+\sin^2 x)$$

すると，$\displaystyle\int_0^{\pi}\left(1+\sqrt[5]{1+\sin x}\right)^{10}dx \leqq 2^9\int_0^{\pi}(2+2\sin x+\sin^2 x)\,dx$ ……②となり，

$$\int_0^{\pi}(2+2\sin x+\sin^2 x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(4+4\sin x+1-\cos 2x)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}(5\pi+4\cdot 2-0)=\frac{1}{2}(5\pi+8)\text{………③}$$

②③より，$\pi<3.15$ を用いると，

$$\int_0^{\pi}\left(1+\sqrt[5]{1+\sin x}\right)^{10}dx \leqq 2^8(5\pi+8)<2^8(5\times 3.15+8)=6080$$

［解　説］

定積分と不等式の標準的なな問題です。(1)の誘導が(2)にストレートに繋がっています。

4

問題のページへ

(1)　自然数 n に対し，$2^n=(3-1)^n$ に注意して二項定理を適用すると，

$$2^n-1=(3-1)^n-1\equiv(-1)^n-1 \pmod 3$$

そこで，m を自然数とし，n を偶奇に場合分けして，以下，mod3 で記すと，

(i)　n が偶数 $(n=2m)$ のとき　$2^n-1\equiv(-1)^{2m}-1\equiv1-1\equiv0$

(ii)　n が奇数 $(n=2m-1)$ のとき　$2^n-1\equiv(-1)^{2m-1}-1\equiv-1-1\equiv-2\equiv1$

(i)(ii)より，2^n-1 が 3 で割り切れる自然数 n は，$n=2m$ (m は自然数)である。

(2)　k を 0 以上の整数として，n を $n=3k+l$ $(l=1,\ 2,\ 3)$ とおくと，二項定理より，

$$n^n-1=(3k+l)^n-1\equiv l^n-1 \pmod 3$$

そこで，n を $n=3k+l$ $(l=1,\ 2,\ 3)$ に場合分けして，以下，mod3 で記すと，

(i)　$n=3k+1$ のとき　$n^n-1\equiv1^n-1\equiv1-1\equiv0$

(ii)　$n=3k+2$ のとき　$n^n-1\equiv2^n-1$ となり，(1)から，

(ii-i)　n が偶数のとき　$2^n-1\equiv0$

(ii-ii)　n が奇数のとき　$2^n-1\equiv1$

(iii)　$n=3k+3$ のとき　$n^n-1\equiv3^n-1\equiv0^n-1\equiv0-1\equiv-1\equiv2$

(i)(ii)(iii)より，n^n-1 が 3 で割り切れる自然数 n は，

$$n=3k+1,\ n=3k+2\ (n \text{ は偶数})$$

そこで，n を自然数 m を用いて表すと，

$$n=3(m-1)+1=3m-2,\ n=3(2m-2)+2=6m-4$$

［解　説］

整数問題の定番の 1 つです。類題にかすかな記憶があったので調べたところ，2003 年に一橋大で出題されていました。

5

問題のページへ

(1) $\cos\theta\cos(n+1)\theta=\dfrac{1}{2}\{\cos(n+2)\theta+\cos n\theta\}$ より，

$$\cos(n+2)\theta-2\cos\theta\cos(n+1)\theta+\cos n\theta=0\ \cdots\cdots\cdots①$$

(2) ①において $n=3$ のとき，$\cos 5\theta=2\cos\theta\cos 4\theta-\cos 3\theta$ となり，

$$\cos 5\theta=2\cos\theta(2\cos^2 2\theta-1)-(4\cos^3\theta-3\cos\theta)\ \cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$\cos\theta=x$ とおくと，$\cos^2 2\theta=(2x^2-1)^2=4x^4-4x^2+1$ となり，②から，

$$\begin{aligned}\cos 5\theta&=2x\{2(4x^4-4x^2+1)-1\}-(4x^3-3x)\\&=16x^5-16x^3+2x-4x^3+3x=16x^5-20x^3+5x\ \cdots\cdots\cdots③\end{aligned}$$

(3) $\theta=\dfrac{\pi}{10}$ とし，$\cos\dfrac{\pi}{10}=x$ とおくと，$\cos 5\theta=\cos\dfrac{\pi}{2}=0$ なので，③から，

$$16x^5-20x^3+5x=0\,,\ \ x(16x^4-20x^2+5)=0$$

よって，$x=0$ または $x^2=\dfrac{10\pm2\sqrt{5}}{16}=\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{8}$ となる。

ここで，$0<\dfrac{\pi}{10}<\dfrac{\pi}{6}$ より $\dfrac{\sqrt{3}}{2}<\cos\dfrac{\pi}{10}<1$ となり，$\dfrac{3}{4}<\cos^2\dfrac{\pi}{10}<1$ なので，

$$\cos^2\frac{\pi}{10}=x^2=\frac{5+\sqrt{5}}{8}$$

［解 説］

三角関数と高次方程式の融合問題です。(1)は積和公式から記述しましたが，出題の意図を忖度して，加法定理から公式を導くと考えるべきでしょうか。