1　　解答例のページへ

平面上に三角形 ABC と動点 P がある。ある定数 k について，$\mathrm{PA}^2+2\mathrm{PB}^2+3\mathrm{PC}^2=k$ を満たすように点 P が動くとき，点 P は円を描く。この円の中心を O とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

(2)　三角形 OAB, OBC, OCA の面積をそれぞれ S_1，S_2，S_3 とする。このとき，$S_1:S_2:S_3$ を求めよ。

2

解答例のページへ

a は実数とする。関数 $f(x)$ を $f(x)=x^3-3(a+2)x^2+24ax-2a^2-41a+28$ と定めるとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$f(2)\geqq 0$ となるとき，a のとり得る値の範囲を求めよ。

(2)　$x\geqq 2$ となるすべての x に対して $f(x)\geqq 0$ が成り立つとき，a のとり得る値の範囲を求めよ。

$\boxed{3}$ 解答例のページへ

数列$\{a_n\}$は初項aが 0 でない等差数列であり，また，a_1，$\dfrac{a_2}{3}$，$\dfrac{a_3}{5}$は公比が 1 でない等比数列であるとする。このとき，$\{a_n\}$の一般項をaおよびnを用いて表せ。

4

解答例のページへ

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ において，2 曲線 $y = |\sin x|$，$y = -\cos 2x$ によって囲まれた図形の面積を求めよ。また，この図形を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ。

$\boxed{5}$

解答例のページへ

実数全体を定義域にもつ t の関数 p は微分可能で，すべての t に対し $\dfrac{dp}{dt}>0$ を満たすとする。また，p の値域は実数全体であるとする。座標平面上において，曲線 $C: y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 上を運動する点 P の時刻 t における座標は $\left(p,\ \dfrac{e^p+e^{-p}}{2}\right)$ であり，点 P の速度 $\vec{u}$ はすべての t に対し $|\vec{u}|=2$ を満たすとする。座標平面上を運動する点 Q は，時刻 t において，曲線 C の点 P における法線の $y>\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ を満たす部分にあり，$\mathrm{PQ}=1$ であるとする。t が実数全体を動くとき，以下の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底である。

(1)　点 Q の座標を p を用いて表せ。

(2)　点 Q の速度を $\vec{v}$ とするとき，$|\vec{v}|$ のとり得る値の範囲を求めよ。

1　問題のページへ

(1)　ある定数 k について $\mathrm{PA}^2+2\mathrm{PB}^2+3\mathrm{PC}^2=k$ から，$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+2|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2+3|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2=k$

$$|\overrightarrow{\mathrm{CA}}-\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2+2|\overrightarrow{\mathrm{CB}}-\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2+3|-\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2=k$$

まとめると，$6|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2+2|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}-4\overrightarrow{\mathrm{CB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}=k$ となり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2-\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{CA}}+2\overrightarrow{\mathrm{CB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\frac{1}{6}(k-|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2-2|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|^2)$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}-\frac{1}{6}(\overrightarrow{\mathrm{CA}}+2\overrightarrow{\mathrm{CB}})\right|^2=\frac{1}{36}(6k+|\overrightarrow{\mathrm{CA}}+2\overrightarrow{\mathrm{CB}}|^2-6|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2-12|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|^2)$$

$$=\frac{1}{36}(6k-5|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2-8|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|^2-4\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}})$$

ここで，定数 $K=\frac{1}{36}(6k-5|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2-8|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|^2-4\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}})$ とおくと，

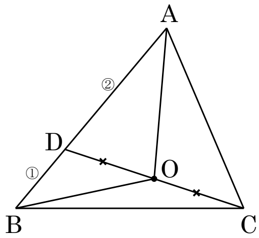
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}-\frac{1}{6}(\overrightarrow{\mathrm{CA}}+2\overrightarrow{\mathrm{CB}})\right|^2=K$$

点 P は中心 O の円を描くことから，$\overrightarrow{\mathrm{CO}}=\frac{1}{6}(\overrightarrow{\mathrm{CA}}+2\overrightarrow{\mathrm{CB}})$ とおくことができ，

$$-6\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}+2(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}),\ -3\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる。

(2)　辺 AB を $2:1$ に内分する点を D とおくと，



$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

(1)から $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ となり，O は線分 CD の中点である。

ここで，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を S，$\triangle\mathrm{OAB}$，$\triangle\mathrm{OBC}$，$\triangle\mathrm{OCA}$ の面積をそれぞれ S_1，S_2，S_3 とすると，

$$S_1=\frac{1}{2}S,\ S_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}S=\frac{1}{6}S,\ S_3=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}S=\frac{1}{3}S$$

これより，$S_1:S_2:S_3=\frac{1}{2}:\frac{1}{6}:\frac{1}{3}=3:1:2$ である。

［コメント］

円のベクトル方程式を題材にした平面ベクトルの問題です。

2

問題のページへ

(1)　$f(x)=x^3-3(a+2)x^2+24ax-2a^2-41a+28$ に対し，$f(2)\geqq 0$ から，

$$8-12(a+2)+48a-2a^2-41a+28\geqq 0\,,\ \ 2a^2+5a-12\leqq 0$$

すると，$(a+4)(2a-3)\leqq 0$ より，$-4\leqq a\leqq\dfrac{3}{2}$ となる。

(2)　$x\geqq 2$ となるすべての x に対して $f(x)\geqq 0$ が成り立つとき，まず $f(2)\geqq 0$ であることが必要であり，(1)から $-4\leqq a\leqq\dfrac{3}{2}$ のもとで，

$$f'(x)=3x^2-6(a+2)x+24a$$
$$=3(x-2a)(x-4)$$

すると，$-8\leqq 2a\leqq 3$ から，$f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	$\cdots$	$2a$	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

したがって，$x\geqq 2$ で $f(x)\geqq 0$ の条件は，$f(2)\geqq 0$ から，$2a$ と 2 の大小関係にかかわらず $f(4)\geqq 0$ であり，

$$64-48(a+2)+96a-2a^2-41a+28\geqq 0\,,\ \ 2a^2-7a+4\leqq 0$$

これより，$\dfrac{7-\sqrt{17}}{4}\leqq a\leqq\dfrac{7+\sqrt{17}}{4}$ となり，$-4\leqq a\leqq\dfrac{3}{2}$ と合わせると，

$$\frac{7-\sqrt{17}}{4}\leqq a\leqq\frac{3}{2}$$

［コメント］

微分と増減の問題です。(1)の設問により，(2)では場合分けが不要になりました。

$\boxed{3}$

問題のページへ

数列$\{a_n\}$は初項$a \neq 0$の等差数列より，公差をdとおくと，$a_n = a + (n-1)d$

さて，$a_1 = a$，$\dfrac{a_2}{3} = \dfrac{a+d}{3}$，$\dfrac{a_3}{5} = \dfrac{a+2d}{5}$は，この順に等比数列より，

$$\left(\frac{a+d}{3}\right)^2 = a \cdot \frac{a+2d}{5},\ 5(a^2+2ad+d^2) = 9(a^2+2ad)$$

すると，$4a^2+8ad-5d^2=0$から$(2a-d)(2a+5d)=0$となり，$d = 2a,\ -\dfrac{2}{5}a$

(i)　$d=2a$のとき　$a_1 = a$，$\dfrac{a_2}{3} = \dfrac{a+2a}{3} = a$，$\dfrac{a_3}{5} = \dfrac{a+4a}{5} = a$

すると，等比数列a_1，$\dfrac{a_2}{3}$，$\dfrac{a_3}{5}$は，公比が1となり不適である。

(ii)　$d = -\dfrac{2}{5}a$のとき　$a_1 = a$，$\dfrac{a_2}{3} = \dfrac{1}{3}\left(a - \dfrac{2}{5}a\right) = \dfrac{a}{5}$，$\dfrac{a_3}{5} = \dfrac{1}{5}\left(a - \dfrac{4}{5}a\right) = \dfrac{a}{25}$

すると，等比数列a_1，$\dfrac{a_2}{3}$，$\dfrac{a_3}{5}$は，公比が$\dfrac{1}{5}$となり適する。

(i)(ii)より，$d = -\dfrac{2}{5}a$となり，$a_n = a - \dfrac{2}{5}a(n-1) = -\dfrac{2}{5}an + \dfrac{7}{5}a$

［コメント］

等差数列と等比数列についての基本題です。なお，上記の解は，a_1，$\dfrac{a_2}{3}$，$\dfrac{a_3}{5}$が，「この順に等比数列」，すなわち等比中項が$\dfrac{a_2}{3}$であると解釈したものですが，単に3数が等比数列をなすというのであれば，$d = -\dfrac{7}{2}a$，$d = -\dfrac{11}{12}a$の場合も考えられます。

4

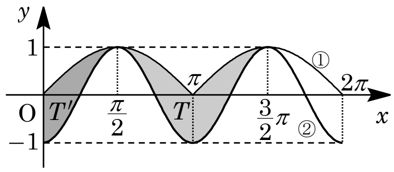
問題のページへ

$f(x)=|\sin x|$，$g(x)=-\cos 2x$ とおくと，

$$f(x+\pi)=|\sin(x+\pi)|=|-\sin x|=f(x)$$
$$f(2\pi-x)=|\sin(2\pi-x)|=|\sin(-x)|=|-\sin x|=f(x)$$
$$g(x+\pi)=-\cos 2(x+\pi)=-\cos 2x=g(x)$$
$$g(2\pi-x)=-\cos 2(2\pi-x)=-\cos(-2x)=-\cos 2x=g(x)$$

これより，2 曲線 $y=f(x)=|\sin x|$ ……①，$y=g(x)=-\cos 2x$ ……②は，ともに周期が π で，そのグラフは直線 $x=\pi$ について対称である。

さて，$0\leqq x\leqq 2\pi$ において，2 曲線①と②によって囲まれた図形 T は，右図の薄い網点部である。



図形 T は直線 $x=\pi$ について対称で，しかも $\pi\leqq x\leqq \dfrac{3}{2}\pi$ の部分は $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ と同じ形である。

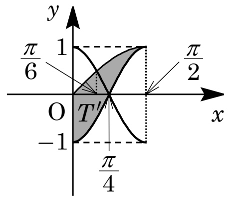
これより，図形 T の面積 S は，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において 2 曲線①と②にはさまれた図形 T' の面積の 2 倍になり，

$$\frac{S}{2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{f(x)-g(x)\}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos 2x)dx=\Big[-\cos x+\frac{1}{2}\sin 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=-(-1)=1$$

したがって，$S=2$ である。

また，図形 T を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積 V は，図形 T' を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積の 2 倍になる。

そこで，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において，曲線②を x 軸について折り返した $y=\cos 2x$ と $y=\sin x$ ……①を連立すると，$\cos 2x=\sin x$ から $1-2\sin^2 x=\sin x$ となり，



$$2\sin^2 x+\sin x-1=0,\ (2\sin x-1)(\sin x+1)=0$$

すると，$\sin x=\dfrac{1}{2}$ から $x=\dfrac{\pi}{6}$ となるので，

$$\frac{V}{2}=\pi\int_0^{\frac{\pi}{6}}\{-g(x)\}^2dx+\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\{f(x)\}^2dx-\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\{g(x)\}^2dx$$
$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 2x\,dx+\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx-\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 2x\,dx$$
$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\cos 4x}{2}dx+\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{2}dx-\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 4x}{2}dx$$
$$=\frac{\pi}{2}\Big[x+\frac{1}{4}\sin 4x\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}+\frac{\pi}{2}\Big[x-\frac{1}{2}\sin 2x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}\Big[x+\frac{1}{4}\sin 4x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

値を代入してまとめると，

$$\frac{V}{2}=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3}{8}\sqrt{3}\right)$$

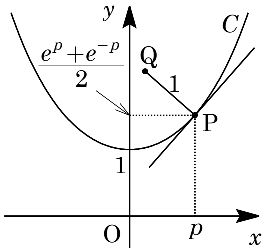
したがって，$V=\pi\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{3}{8}\sqrt{3}\right)$である。

[コメント]

面積と回転体の体積計算の問題です。三角関数のもつ周期性や対称性に着目することがポイントです。

5

問題のページへ



(1)　曲線 $C : y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 上を運動する点 $\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{e^p+e^{-p}}{2}\right)$ における接線の方向ベクトルの成分は，$y'=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ より，

$\left(1,\ \dfrac{e^p-e^{-p}}{2}\right)=\dfrac{1}{2}(2,\ e^p-e^{-p})$ とおくことができる。

これより，法線の方向ベクトルで y 成分が正のものは，$(-e^p+e^{-p},\ 2)$ とおけるので，$\mathrm{PQ}=1$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\frac{1}{\sqrt{(-e^p+e^{-p})^2+2^2}}(-e^p+e^{-p},\ 2)$$

$$=\left(p,\ \frac{e^p+e^{-p}}{2}\right)+\frac{1}{e^p+e^{-p}}(-e^p+e^{-p},\ 2)$$

$$=\left(p-\frac{e^p-e^{-p}}{e^p+e^{-p}},\ \frac{e^p+e^{-p}}{2}+\frac{2}{e^p+e^{-p}}\right)$$

$$=\left(\frac{(p-1)e^p+(p+1)e^{-p}}{e^p+e^{-p}},\ \frac{e^{2p}+e^{-2p}+6}{2(e^p+e^{-p})}\right)$$

したがって，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{(p-1)e^p+(p+1)e^{-p}}{e^p+e^{-p}},\ \dfrac{e^{2p}+e^{-2p}+6}{2(e^p+e^{-p})}\right)$ となる。

(2)　$\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと $x=p$，$y=\dfrac{e^p+e^{-p}}{2}$ であり，点 P の速度 $\vec{u}$ は，

$$\vec{u}=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)=\left(\frac{dx}{dp}\cdot\frac{dp}{dt},\ \frac{dy}{dp}\cdot\frac{dp}{dt}\right)=\frac{dp}{dt}\left(1,\ \frac{e^p-e^{-p}}{2}\right)$$

$\dfrac{dp}{dt}>0$ から，$|\vec{u}|=\left|\dfrac{dp}{dt}\right|\sqrt{1^2+\left(\dfrac{e^p-e^{-p}}{2}\right)^2}=\dfrac{dp}{dt}\cdot\dfrac{e^p+e^{-p}}{2}$ となり，$|\vec{u}|=2$ より，

$$\frac{dp}{dt}\cdot\frac{e^p+e^{-p}}{2}=2,\ \frac{dp}{dt}=\frac{4}{e^p+e^{-p}}\cdots\cdots\cdots(*)$$

さて，$\mathrm{Q}(X,\ Y)$ とおくと，(1)から $X=p-\dfrac{e^p-e^{-p}}{e^p+e^{-p}}$，$Y=\dfrac{e^p+e^{-p}}{2}+\dfrac{2}{e^p+e^{-p}}$

$$\frac{dX}{dp}=1-\frac{(e^p+e^{-p})^2-(e^p-e^{-p})^2}{(e^p+e^{-p})^2}=1-\frac{4}{(e^p+e^{-p})^2}=\frac{(e^p-e^{-p})^2}{(e^p+e^{-p})^2}$$

$$\frac{dY}{dp}=\frac{e^p-e^{-p}}{2}-\frac{2(e^p-e^{-p})}{(e^p+e^{-p})^2}=\frac{(e^p-e^{-p})\{(e^p+e^{-p})^2-4\}}{2(e^p+e^{-p})^2}=\frac{(e^p-e^{-p})^3}{2(e^p+e^{-p})^2}$$

すると，点 Q の速度 $\vec{v}$ は，$(*)$より，

$$\vec{v}=\left(\frac{dX}{dt},\ \frac{dY}{dt}\right)=\left(\frac{dX}{dp}\cdot\frac{dp}{dt},\ \frac{dY}{dp}\cdot\frac{dp}{dt}\right)=\frac{4}{e^p+e^{-p}}\left(\frac{dX}{dp},\ \frac{dY}{dp}\right)$$

$$=\frac{4}{e^p+e^{-p}}\left(\frac{(e^p-e^{-p})^2}{(e^p+e^{-p})^2},\ \frac{(e^p-e^{-p})^3}{2(e^p+e^{-p})^2}\right)=\frac{4(e^p-e^{-p})^2}{(e^p+e^{-p})^3}\left(1,\ \frac{e^p-e^{-p}}{2}\right)$$

$$|\vec{v}|=\left|\frac{4(e^p-e^{-p})^2}{(e^p+e^{-p})^3}\right|\sqrt{1^2+\left(\frac{e^p-e^{-p}}{2}\right)^2}=\frac{4(e^p-e^{-p})^2}{(e^p+e^{-p})^3}\cdot\frac{e^p+e^{-p}}{2}$$
$$=\frac{2(e^p-e^{-p})^2}{(e^p+e^{-p})^2}=2\left(\frac{e^p-e^{-p}}{e^p+e^{-p}}\right)^2$$

そこで，$f(p)=\dfrac{e^p-e^{-p}}{e^p+e^{-p}}$ とおくと，$|\vec{v}|=2\{f(p)\}^2$ となり，

$$f'(p)=\frac{(e^p+e^{-p})^2-(e^p-e^{-p})^2}{(e^p+e^{-p})^2}=\frac{4}{(e^p+e^{-p})^2}>0$$

これより，p が実数全体を動くとき，$f(p)$ は単調に増加し，

$$\lim_{p\to-\infty}f(p)=\lim_{p\to-\infty}\frac{e^{2p}-1}{e^{2p}+1}=-1,\quad \lim_{p\to\infty}f(p)=\lim_{p\to\infty}\frac{1-e^{-2p}}{1+e^{-2p}}=1$$

したがって，$-1<f(p)<1$ から $0\leqq\{f(p)\}^2<1$ となり，$0\leqq|\vec{v}|<2$ である。

［コメント］

平面上の点の運動についての微分の応用問題です。計算量はかなりありますが，題材が有名な曲線で，途中に同じプロセスが現れてくるようなこともあり，煩雑という感じはしないでしょう。