$\boxed{1}$　解答解説のページへ

等式 $x^2+(i-2)x+2ab+\left(\dfrac{b}{2}-2a\right)i=0$ を満たす実数 a，b が存在するような，実数 x の範囲を求めよ。ただし，$i=\sqrt{-1}$ である。

2

解答解説のページへ

$|x^2-3x+1|>|x^2-1|-|2x-1|$ を満たす x の範囲を求めよ。

3

解答解説のページへ

2つの正の数 $a,\ b$ に対し, xy 平面上の3点を $\mathrm{A}(-a,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ b)$, $\mathrm{C}(a,\ 0)$ とする。$0<t<1$ である各 t に対し, 線分 AB と BC を $t:1-t$ に内分する点をそれぞれ $\mathrm{P}(t)$, $\mathrm{Q}(t)$ とし, さらに線分 $\mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)$ を $t:1-t$ に内分する点を $\mathrm{R}(t)$ とし, 点 $\mathrm{R}(t)$, $0\leqq t\leqq 1$ の描く曲線を R とする。ただし, $\mathrm{R}(0)=\mathrm{A}$, $\mathrm{R}(1)=\mathrm{C}$ とする。

(1) 曲線 R を x と y で表せ。

(2) 2点 $\mathrm{P}(t)$, $\mathrm{Q}(t)$ を結ぶ直線 $l(t)$ の方程式を求め, $l(t)$ が, 点 $\mathrm{R}(t)$ で曲線 R に接することを示せ。

(3) 三角形 ABC 内で直線 $l(t)$, $0\leqq t\leqq 1$ が通る点の領域を図示し, その面積 S を求めよ。ただし, $l(0)$ は点 A, B を通る直線とし, $l(1)$ は点 B, C を通る直線とする。

4

解答解説のページへ

数直線上を，原点 O から出発して動く点 A があるとする。1 つのさいころを振り，その出た目が 1 のとき点 A を右に 1 動かし，出た目が 2，3 のときは右に 2 動かすものとする。また出た目が 4 のとき左に 1 動かし，出た目が 5, 6 のときは左に 2 動かすものとする。このとき，さいころを 5 回振った後に点 A が原点にある確率を求めよ。

1

問題のページへ

$x^2+(i-2)x+2ab+\left(\dfrac{b}{2}-2a\right)i=0$ を変形して,

$$(x^2-2x+2ab)+\left(x+\frac{b}{2}-2a\right)i=0$$

$a,\ b,\ x$ が実数なので,

$$x^2-2x+2ab=0\cdots\cdots\cdots①,\quad x+\frac{b}{2}-2a=0\cdots\cdots\cdots②$$

②より, $b=4a-2x$

①に代入して, $x^2-2x+2a(4a-2x)=0$

$$8a^2-4xa+x^2-2x=0\cdots\cdots\cdots③$$

a が実数のとき②より b も実数になるので, 求める条件は方程式③が実数解をもつことである。

$$D/4=4x^2-8(x^2-2x)\geqq 0$$

まとめて $x^2-4x\leqq 0$ より, $0\leqq x\leqq 4$ となる。

［解　説］

①②式を $a,\ b$ についての方程式として見直し, x の条件を求める問題です。まず 1 完で, 勢いをつけたい問題です。

2　　問題のページへ

$|x^2-3x+1|>|x^2-1|-|2x-1|$ に対して，$x^2-3x+1=0$ の解は $x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$，$x^2-1=0$ の解は $x=\pm1$，$2x-1=0$ の解は $x=\dfrac{1}{2}$ なので，次の 6 つの場合に分けて解を求める。

(i)　$x<-1$ のとき　$x^2-3x+1>x^2-1+(2x-1)$ より $-5x>-3$，$x<\dfrac{3}{5}$

$x<-1$ と合わせて，$x<-1$

(ii)　$-1\leqq x<\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ のとき　$x^2-3x+1>-(x^2-1)+(2x-1)$ より，

$2x^2-5x+1>0$ から，$x<\dfrac{5-\sqrt{17}}{4}$，$\dfrac{5+\sqrt{17}}{4}<x$

$-1\leqq x<\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ と合わせて，$-1\leqq x<\dfrac{5-\sqrt{17}}{4}$

(iii)　$\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\leqq x<\dfrac{1}{2}$ のとき　$-(x^2-3x+1)>-(x^2-1)+(2x-1)$ より，$x>1$

$\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\leqq x<\dfrac{1}{2}$ と合わせると，解なし。

(iv)　$\dfrac{1}{2}\leqq x<1$ のとき　$-(x^2-3x+1)>-(x^2-1)-(2x-1)$ より $5x>3$，$x>\dfrac{3}{5}$

$\dfrac{1}{2}\leqq x<1$ と合わせて，$\dfrac{3}{5}<x<1$

(v)　$1\leqq x<\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ のとき　$-(x^2-3x+1)>x^2-1-(2x-1)$ より，

$2x^2-5x+1<0$ から，$\dfrac{5-\sqrt{17}}{4}<x<\dfrac{5+\sqrt{17}}{4}$

$1\leqq x<\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ と合わせて，$1\leqq x<\dfrac{5+\sqrt{17}}{4}$

(vi)　$\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\leqq x$ のとき　$x^2-3x+1>x^2-1-(2x-1)$ より $-x>-1$，$x<1$

$\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\leqq x$ と合わせると，解なし。

(i)〜(vi)より，$x<\dfrac{5-\sqrt{17}}{4}$，$\dfrac{3}{5}<x<\dfrac{5+\sqrt{17}}{4}$

［解　説］

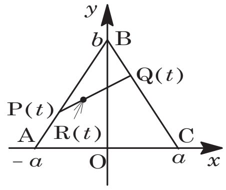
注意力がすべてです。受験生でないことに感謝したい問題です。

$\boxed{3}$ 問題のページへ

(1) 条件より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}(t)}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(-a(1-t),\ bt)$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}(t)}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(at,\ b(1-t))$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}(t)}&=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OP}(t)}+t\overrightarrow{\mathrm{OQ}(t)}\\&=(1-t)(-a(1-t),\ bt)+t(at,\ b(1-t))\\&=(a(2t-1),\ 2bt(1-t))\end{aligned}$$



点 $\mathrm{R}(t)$ の座標を $(x,\ y)$ とすると，$x=a(2t-1)$ ……①，$y=2bt(1-t)$ ……②

①より $t=\dfrac{x+a}{2a}$，これを②に代入して，

$$y=2b\cdot\frac{x+a}{2a}\left(1-\frac{x+a}{2a}\right)=\frac{b}{2a^2}(x+a)(a-x)=-\frac{b}{2a^2}(x^2-a^2)\ \cdots\cdots\cdots③$$

なお, $0\leqq t\leqq 1$ なので①から，$-a\leqq x\leqq a$ である。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)}=(at+a(1-t),\ b(1-t)-bt)=(a,\ b(1-2t))$ より，

$$l(t):y-bt=\frac{b(1-2t)}{a}\left\{x+a(1-t)\right\}$$

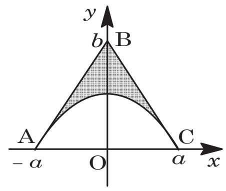
まとめて，$y=\dfrac{b(1-2t)}{a}x+b(1-2t+2t^2)$ ………④

③④より，$-\dfrac{b}{2a^2}(x^2-a^2)=\dfrac{b(1-2t)}{a}x+b(1-2t+2t^2)$

$$x^2+2a(1-2t)x+a^2(1-2t)^2=0,\ \left\{x+a(1-2t)\right\}^2=0\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

これより，⑤は重解 $x=a(2t-1)$ をもつので，③と④は点 $\mathrm{R}(t)$ で接する。

(3) 直線 $l(t)$ の通過する領域は，(1)(2)より，直線 AB，BC の下側で，放物線③の上側であり，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



その面積 S は，

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot b-\int_{-a}^{a}-\frac{b}{2a^2}(x^2-a^2)\,dx\\&=ab+\frac{b}{2a^2}\left(-\frac{1}{6}\right)(a+a)^3=\frac{1}{3}ab\end{aligned}$$

［解　説］

昨年，理系で類題の出ている線分の通過領域の問題です。(2)で図形的に考えることができるように誘導があります。

$\boxed{4}$

問題のページへ

1 が a 回, 2 または 3 が b 回, 4 が c 回, 5 または 6 が d 回出たとすると, 条件より,

$$a+b+c+d=5\cdots\cdots\cdots①,\ \ 2+2b-c-2d=0\cdots\cdots\cdots②$$

①×2＋②より, $3a+4b+c=10\cdots\cdots\cdots③$

$a\geqq 0,\ c\geqq 0$ なので $4b\leqq 10$ となり, b は 0 以上の整数より, $b=0,\ 1,\ 2$

(i)　$b=0$ のとき　③より $3a+c=10$

①より $0\leqq a+c\leqq 5$ なので, $(a,\ c)=(3,\ 1)$

このとき①から $(a,\ b,\ c,\ d)=(3,\ 0,\ 1,\ 1)$ となり, ②を満たす。

(ii)　$b=1$ のとき　③より $3a+c=6$

①より $0\leqq a+c\leqq 4$ なので, $(a,\ c)=(2,\ 0),\ (1,\ 3)$

$(a,\ c)=(2,\ 0)$ のとき①から $(a,\ b,\ c,\ d)=(2,\ 1,\ 0,\ 2)$ となり, ②を満たす。

$(a,\ c)=(1,\ 3)$ のとき①から $(a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 1,\ 3,\ 0)$ となり, ②を満たす。

(iii)　$b=2$ のとき　③より $3a+c=2$

①より $0\leqq a+c\leqq 3$ なので, $(a,\ c)=(0,\ 2)$

このとき①から $(a,\ b,\ c,\ d)=(0,\ 2,\ 2,\ 1)$ となり, ②を満たす。

(i)(ii)(iii)より, 5 回振った後に点 A が原点にあるのは, $(a,\ b,\ c,\ d)$ の組が,

$$(3,\ 0,\ 1,\ 1),\ (2,\ 1,\ 0,\ 2),\ (1,\ 1,\ 3,\ 0),\ (0,\ 2,\ 2,\ 1)$$

求める確率は, これらの場合の和となり,

$$\frac{5!}{3!}\left(\frac{1}{6}\right)^3\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}+\frac{5!}{2!2!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{5!}{3!}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3+\frac{5!}{2!2!}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\frac{1}{3}$$

$$=\frac{20}{3\cdot 6^4}+\frac{30}{3^3\cdot 6^2}+\frac{20}{3\cdot 6^4}+\frac{30}{3^3\cdot 6^2}=\frac{70}{3^3\cdot 6^2}=\frac{35}{486}$$

［解 説］

ランダムウォークを題材とした頻出問題です。5 回移動するだけですので, 場合分けの数もそんなに多くはありません。