1

解答解説のページへ

$E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $K=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$とし, $p,\ q$を実数とする。

(1)　$(aE+bK)^2=pE+qK$となる実数$a,\ b$が存在するためには, $p,\ q$がどんな条件を満たすことが必要十分であるか。

(2)　$p,\ q$が$p^2+q^2=2$を満たし, さらに

$$(aE+bK)^2=pE+qK,\ (cE+dK)^2=qE-pK$$

となる実数$a,\ b,\ c,\ d$が存在するとする。このとき$p,\ q$の値を求めよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

α，β は $|\alpha+\beta|<2$ を満たす複素数とする。このとき関数

$$f(x)=\frac{1}{4}|\alpha+\beta|^2x^2-(|\alpha|+|\beta|)x+1$$

の $0\leqq x\leqq 1$ における最小値を求めよ。

3

解答解説のページへ

実数 $a,\ b,\ c,\ d$ が $ad-bc\neq 0$ を満たすとき，関数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ について，次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。

(2) $f^{-1}(x)=f(x)$ を満たし，$f(x)\neq x$ となる $a,\ b,\ c,\ d$ の関係式を求めよ。

(3) $f^{-1}(x)=f(f(x))$ を満たし，$f(x)\neq x$ となる $a,\ b,\ c,\ d$ の関係式を求めよ。

4

解答解説のページへ

数直線上を，原点 O から出発して動く点 A があるとする。1 つのさいころを振り，その出た目が 1 のとき点 A を右に 1 動かし，出た目が 2，3 のときは右に 2 動かすものとする。また出た目が 4 のとき左に 1 動かし，出た目が 5, 6 のときは左に 2 動かすものとする。このとき，さいころを 5 回振った後に点 A が原点にある確率を求めよ。

5

解答解説のページへ

$0<t<1$ として，頂点が O$(0,\ 0)$，A$(t,\ 0)$，B$(0,\ 1)$ である三角形と，頂点が O，P$(1-t,\ 0)$，Q$(1-t,\ 1-t)$，R$(0,\ 1-t)$ である正方形の共通部分の面積を S とするとき，S を t の式で表せ。また，S を最大にする t の値を求めよ。

6

解答解説のページへ

数列$\{\alpha_n\}$を初項$\dfrac{4}{5}$，公比 2 の等比数列，数列$\{\beta_n\}$を初項$\dfrac{1}{5}$，公比$-\dfrac{1}{2}$の等比数列とする。

(1)　$n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$のとき，α_nの小数部分を求めよ。

(2)　$a_n=\alpha_n+\beta_n$の小数部分b_nを求めよ。

(3)　数列$\{b_n\}$の初項から第 100 項までの和の整数部分を求めよ。

$\boxed{1}$

問題のページへ

(1) ハミルトン・ケーリーの定理より，$K^2 - E = O$，$K^2 = E$

また，$E^2 = E$，$EK = KE = K$ より，

$$(aE + bK)^2 = a^2E + 2abK + b^2E = (a^2 + b^2)E + 2abK$$

条件より，$(a^2 + b^2)E + 2abK = pE + qK$

$$(a^2 + b^2 - p)E + (2ab - q)K = O \cdots\cdots\cdots ①$$

ここで，$2ab - q \neq 0$ とすると，$K = -\dfrac{a^2 + b^2 - p}{2ab - q}E$ となり不適。

よって，$2ab - q = 0$，①より $a^2 + b^2 - p = 0$

$$p = a^2 + b^2,\ q = 2ab \cdots\cdots\cdots ②$$

②を満たす実数 a, b が存在する条件は，$(a+b)^2 = p + q$ とまとめて，

$$a + b = \pm\sqrt{p+q}\ (p + q \geqq 0),\ ab = \frac{q}{2}$$

すると, a, b は 2 次方程式 $t^2 \mp \sqrt{p+q}\,t + \dfrac{q}{2} = 0$ の 2 つの解となることより,

$$D = (p+q) - 4\cdot\frac{q}{2} \geqq 0,\ p - q \geqq 0$$

以上より，求める条件は，$p + q \geqq 0$，$p - q \geqq 0$

(2) $(aE + bK)^2 = pE + qK$ から, (1)より $p + q \geqq 0$，$p - q \geqq 0 \cdots\cdots\cdots ③$

$(cE + dK)^2 = qE - pK$ から, (1)より $q - p \geqq 0$，$q + p \geqq 0 \cdots\cdots\cdots ④$

③④をまとめると，$q \geqq -p$，$p \geqq q$，$q \geqq p$ となるので,

$$q \geqq -p \cdots\cdots ⑤,\ p = q \cdots\cdots ⑥$$

また条件より，$p^2 + q^2 = 2 \cdots\cdots\cdots ⑦$

⑤⑥⑦より，$(p,\ q) = (1,\ 1)$

［解 説］

見かけ上, 行列の問題ですが, それは①式まででです。E と K が 1 次独立であることを用いた後は式計算となります。

$\boxed{2}$　問題のページへ

$|\alpha+\beta|=k\ (0\leqq k<2)$，$|\alpha|+|\beta|=l$ とおくと，$f(x)=\dfrac{1}{4}k^2x^2-lx+1$ となる。

(i)　$k=0\ (|\alpha+\beta|=0)$ のとき

$f(x)=-lx+1$ となり，$l\geqq 0$ なので，$0\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の最小値は，

$$f(1)=-l+1=-|\alpha|-|\beta|+1$$

(ii)　$0<k<2\ (0<|\alpha+\beta|<2)$ のとき

$$f(x)=\frac{1}{4}k^2\left(x-\frac{2l}{k^2}\right)^2-\frac{l^2}{k^2}+1$$

ここで，$\dfrac{2l}{k^2}-1=\dfrac{1}{k^2}(2l-k^2)=\dfrac{1}{k^2}\left\{2\left(|\alpha|+|\beta|\right)-|\alpha+\beta|^2\right\}$

さて，複素数 α，β に対して，$|\alpha|+|\beta|\geqq|\alpha+\beta|$ が成り立つので，

$$2\left(|\alpha|+|\beta|\right)-|\alpha+\beta|^2\geqq 2|\alpha+\beta|-|\alpha+\beta|^2=2k-k^2=-(k-1)^2+1$$

$0<k<2$ において，$-(k-1)^2+1>0$ なので，$\dfrac{2l}{k^2}-1>0$，$\dfrac{2l}{k^2}>1$

すると，$0\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の最小値は，

$$f(1)=\frac{1}{4}k^2-l+1=\frac{1}{4}|\alpha+\beta|^2-|\alpha|-|\beta|+1$$

(i)(ii)より，$f(x)$ の最小値は，$f(1)=\dfrac{1}{4}|\alpha+\beta|^2-|\alpha|-|\beta|+1$

［解 説］

(ii)の場合をさらに分けて最小値を求めるのでは，条件の $|\alpha+\beta|<2$ の意味が不明です。ここは $|\alpha|+|\beta|$ と $|\alpha+\beta|$ の関係がポイントとなりますが，その両者をつなぐのは，どう考えても三角不等式しかありません。なお，昨年，東大・理で，この不等式を利用する問題が出ています。

3

問題のページへ

(1)　$y = f(x)$として，$c \neq 0$のとき，$y = \dfrac{ax+b}{cx+d} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{bc-ad}{c(cx+d)}$，$cy - a = \dfrac{bc-ad}{cx+d}$

$ad - bc \neq 0$より，$cx + d = \dfrac{bc-ad}{cy-a}$，$x = -\dfrac{d}{c} + \dfrac{bc-ad}{c(cy-a)} = \dfrac{-dy+b}{cy-a}$………①

また，$c = 0$のとき，$y = \dfrac{ax+b}{d}$，$dy = ax + b$

$ad - bc \neq 0$から$a \neq 0$なので，$x = \dfrac{dy-b}{a}$となり，この式は①において$c = 0$とした式と一致する。

以上より，$f^{-1}(y) = \dfrac{-dy+b}{cy-a}$となり，$f^{-1}(x) = \dfrac{-dx+b}{cx-a}$

(2)　$f^{-1}(x) = f(x)$より，$\dfrac{-dx+b}{cx-a} = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

$(ax+b)(cx-a) + (dx-b)(cx+d) = 0$

$c(a+d)x^2 - (a^2 - d^2)x - b(a+d) = 0$

まとめて，$(a+d)\left\{cx^2 - (a-d)x - b\right\} = 0$………②

$f(x) \neq x$より$\dfrac{ax+b}{cx+d} \neq x$，まとめて，$cx^2 - (a-d)x - b \neq 0$………③

②③より求める条件は，$a + d = 0$

(3)　$f(f(x)) = \dfrac{af(x)+b}{cf(x)+d} = \dfrac{a(ax+b)+b(cx+d)}{c(ax+b)+d(cx+d)} = \dfrac{(a^2+bc)x+b(a+d)}{c(a+d)x+(bc+d^2)}$

$f^{-1}(x) = f(f(x))$より，$\dfrac{-dx+b}{cx-a} = \dfrac{(a^2+bc)x+b(a+d)}{c(a+d)x+(bc+d^2)}$

$\left\{(a^2+bc)x + b(a+d)\right\}(cx-a) + (dx-b)\left\{c(a+d)x + (bc+d^2)\right\} = 0$

$c(a^2+bc+ad+d^2)x^2 - (a^3 - d^3 - bcd + abc)x - b(a^2+bc+ad+d^2) = 0$

まとめて，$(a^2+ad+bc+d^2)\left\{cx^2 - (a-d)x - b\right\} = 0$………④

$f(x) \neq x$より③が成り立つので，④と合わせると求める条件は，

$a^2 + ad + bc + d^2 = 0$

[解　説]

2×2 行列の積との対応で，過去にも類題が出ています。しかし，本問では，$f(x) = x$のとき$f^{-1}(x) = f(x)$，$f^{-1}(x) = f(f(x))$がともに成立し，それに気付くのが鍵です。

4

問題のページへ

1 が a 回, 2 または 3 が b 回, 4 が c 回, 5 または 6 が d 回出たとすると, 条件より,

$$a+b+c+d=5\cdots\cdots\cdots①,\quad a+2b-c-2d=0\cdots\cdots\cdots②$$

①×2＋②より，$3a+4b+c=10\cdots\cdots\cdots③$

$a\geqq 0$, $c\geqq 0$ なので $4b\leqq 10$ となり, b は 0 以上の整数より，$b=0,\ 1,\ 2$

(i)　$b=0$ のとき　③より $3a+c=10$

①より $0\leqq a+c\leqq 5$ なので，$(a,\ c)=(3,\ 1)$

このとき①から $(a,\ b,\ c,\ d)=(3,\ 0,\ 1,\ 1)$ となり，②を満たす。

(ii)　$b=1$ のとき　③より $3a+c=6$

①より $0\leqq a+c\leqq 4$ なので，$(a,\ c)=(2,\ 0),\ (1,\ 3)$

$(a,\ c)=(2,\ 0)$ のとき①から $(a,\ b,\ c,\ d)=(2,\ 1,\ 0,\ 2)$ となり，②を満たす。

$(a,\ c)=(1,\ 3)$ のとき①から $(a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 1,\ 3,\ 0)$ となり，②を満たす。

(iii) $b=2$ のとき　③より $3a+c=2$

①より $0\leqq a+c\leqq 3$ なので，$(a,\ c)=(0,\ 2)$

このとき①から $(a,\ b,\ c,\ d)=(0,\ 2,\ 2,\ 1)$ となり，②を満たす。

(i)(ii)(iii)より, 5 回振った後に点 A が原点にあるのは，$(a,\ b,\ c,\ d)$ の組が,

$$(3,\ 0,\ 1,\ 1),\ (2,\ 1,\ 0,\ 2),\ (1,\ 1,\ 3,\ 0),\ (0,\ 2,\ 2,\ 1)$$

求める確率は，これらの場合の和となり,

$$\frac{5!}{3!}\Big(\frac{1}{6}\Big)^3\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}+\frac{5!}{2!2!}\Big(\frac{1}{6}\Big)^2\frac{1}{3}\cdot\Big(\frac{1}{3}\Big)^2+\frac{5!}{3!}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}\cdot\Big(\frac{1}{6}\Big)^3+\frac{5!}{2!2!}\Big(\frac{1}{3}\Big)^2\Big(\frac{1}{6}\Big)^2\frac{1}{3}$$

$$=\frac{20}{3\cdot 6^4}+\frac{30}{3^3\cdot 6^2}+\frac{20}{3\cdot 6^4}+\frac{30}{3^3\cdot 6^2}=\frac{70}{3^3\cdot 6^2}=\frac{35}{486}$$

［解 説］

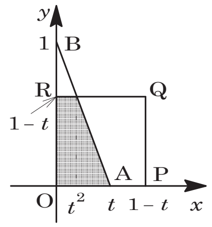
ランダムウォークを題材とした頻出問題です。5 回移動するだけですので，場合分けの数もそんなに多くはありません。

$\boxed{5}$

問題のページへ

まず，直線 AB の方程式は，$y=-\dfrac{1}{t}x+1$ となる。

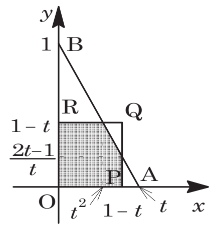
直線 AB と $x=1-t$ との交点は，$y=-\dfrac{1-t}{t}+1=\dfrac{2t-1}{t}$ であり，$0\leqq\dfrac{2t-1}{t}\leqq 1-t$ とすると $1\leqq 2t$ かつ $t^2+t-1\leqq 0$ より，$\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ となる。



$0<t<1$ と合わせて，$\dfrac{1}{2}\leqq t<1$

また，$y=1-t$ との交点は，$1-t=-\dfrac{1}{t}x+1$ より $x=t^2$ であり，$0\leqq t^2\leqq 1-t$ とすると $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\leqq t\leqq\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ となる。

$0<t<1$ と合わせて $0<t\leqq\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

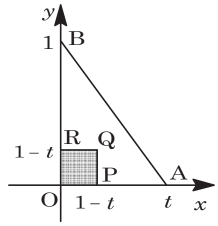


(i)　$0<t\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき

$$S=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot t-\frac{1}{2}t^2\left\{1-(1-t)\right\}=-\frac{1}{2}t^3+\frac{1}{2}t$$

(ii)　$\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ のとき

$$S=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot t-\frac{1}{2}t^2\left\{1-(1-t)\right\}-\frac{1}{2}\left\{1-(1-t)\right\}\cdot\frac{2t-1}{t}$$
$$=-\frac{1}{2}t^3-\frac{3}{2}t+2-\frac{1}{2t}$$



(iii)　$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\leqq t<1$ のとき　$S=(1-t)^2$

さて，$0<t\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき，$S'=-\dfrac{3}{2}t^2+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}(3t^2-1)>0$ となり, S は単調に増加する。

また，$\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ のとき，$S'=-\dfrac{3}{2}t^2-\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2t^2}=-\dfrac{3t^4+3t^2-1}{2t^2}$

$S'=0$ とすると $t^2=\dfrac{-3+\sqrt{21}}{6}$ となり，ここで $\alpha=\sqrt{\dfrac{-3+\sqrt{21}}{6}}$ とおくと,

$$\alpha^2-\frac{1}{4}=\frac{-3+\sqrt{21}}{6}-\frac{1}{4}=\frac{2\sqrt{21}-9}{12}>0$$

$$\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\alpha^2=\frac{6-2\sqrt{5}}{4}-\frac{-3+\sqrt{21}}{6}=\frac{12-3\sqrt{5}-\sqrt{21}}{6}$$
$$>\frac{12-3\sqrt{5}-5}{6}=\frac{7-3\sqrt{5}}{6}>0$$

よって，$\frac{1}{4}<\alpha^2<\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$ より，

$$\frac{1}{2}<\alpha<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

すると, S の増減は右表のようになる。

t	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
S'		$+$	0	$-$	
S		$\nearrow$		$\searrow$	

さらに，$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\leqq t<1$ のとき，$S'=-2(1-t)<0$ となり, S は単調に減少する。

以上より, S は連続的に変化するので，$t=\alpha=\sqrt{\frac{-3+\sqrt{21}}{6}}$ のとき最大となる。

[解　説]

難問というわけではありませんが，詰めの部分の計算が繁雑な問題です。

$\boxed{6}$　　問題のページへ

(1)　条件より，$\alpha_n = \dfrac{4}{5}\cdot 2^{n-1} = \dfrac{1}{5}\cdot 2^{n+1}$

$\alpha_1 = \dfrac{4}{5}$ より $[\alpha_1] = 0$ となり，小数部分は $\dfrac{4}{5}$

$\alpha_2 = \dfrac{8}{5}$ より $[\alpha_2] = 1$ となり，小数部分は $\dfrac{8}{5} - 1 = \dfrac{3}{5}$

$\alpha_3 = \dfrac{16}{5}$ より $[\alpha_3] = 3$ となり，小数部分は $\dfrac{16}{5} - 3 = \dfrac{1}{5}$

$\alpha_4 = \dfrac{32}{5}$ より $[\alpha_4] = 6$ となり，小数部分は $\dfrac{32}{5} - 6 = \dfrac{2}{5}$

$\alpha_5 = \dfrac{64}{5}$ より $[\alpha_5] = 12$ となり，小数部分は $\dfrac{64}{5} - 12 = \dfrac{4}{5}$

(2)　$k = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ として，$\dfrac{k}{5}\times 2^4 = \dfrac{16}{5}k = 3k + \dfrac{k}{5}$ となるので，α_n の小数部分と α_{n+4} の小数部分は等しい。

したがって，α_n の小数部分は周期 4 の周期数列となり，(1)より $\dfrac{4}{5}$，$\dfrac{3}{5}$，$\dfrac{1}{5}$，$\dfrac{2}{5}$ をくり返す。すなわち α_n の小数部分は，$m \geqq 1$ として，$n = 4m-3$ のとき $\dfrac{4}{5}$，$n = 4m-2$ のとき $\dfrac{3}{5}$，$n = 4m-1$ のとき $\dfrac{1}{5}$，$n = 4m$ のとき $\dfrac{2}{5}$ となる。

さて，条件より $\beta_n = \dfrac{1}{5}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ なので，$\beta_1 = \dfrac{1}{5}$，$n \geqq 2$ で $|\beta_n| \leqq \dfrac{1}{10}$ となる。

すると，$n \geqq 2$ のとき，$a_n = \alpha_n + \beta_n$ より，$\alpha_n - \dfrac{1}{10} \leqq a_n \leqq \alpha_n + \dfrac{1}{10}$ となり，しかも α_n の小数部分は $\dfrac{1}{5}$，$\dfrac{2}{5}$，$\dfrac{3}{5}$，$\dfrac{4}{5}$ なので，

$$[a_n] = [\alpha_n + \beta_n] = [\alpha_n]$$

すなわち，a_n の小数部分 b_n は，α_n の小数部分に β_n を加えたものになる。

よって，m を $m \geqq 1$ の整数として，

$$b_n = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^{4m-3} = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\ (n = 4m-2 \text{のとき})$$

$$b_n = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^{4m-2} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\ (n = 4m-1 \text{のとき})$$

$$b_n = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^{4m-1} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\ (n = 4m \text{のとき})$$

$$b_n = \frac{4}{5} + \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^{4m} = \frac{4}{5} + \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\ (n = 4m+1 \text{のとき})$$

なお，$a_1 = \alpha_1 + \beta_1 = \dfrac{4}{5} + \dfrac{1}{5} = 1$ なので，小数部分 b_1 は，$b_1 = 0$ となる。

(3)　まず，$c_m = b_{4m-2} + b_{4m-1} + b_{4m} + b_{4m+1}$ とおくと，

$$c_m = 2+\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^{4m}(-8+4-2+1) = 2-\left(\frac{1}{16}\right)^m$$

すると，$\displaystyle\sum_{k=1}^{100} b_k = b_1 + \sum_{k=2}^{100} b_k = \sum_{k=2}^{100} b_k = \sum_{m=1}^{25} c_m - b_{101}$

$$= 2\times 25 - \frac{\frac{1}{16}\left\{1-\left(\frac{1}{16}\right)^{25}\right\}}{1-\frac{1}{16}} - \left\{\frac{4}{5}+\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^{100}\right\}$$

$$= 50 - \frac{1}{15}\left\{1-\left(\frac{1}{16}\right)^{25}\right\} - \frac{4}{5} - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{16}\right)^{25}$$

$$= 49 + \frac{2}{15} - \frac{2}{15}\left(\frac{1}{16}\right)^{25}$$

以上より，数列$\{b_n\}$の初項から第 100 項までの和の整数部分は 49 である。

［解　説］

まず(1)で周期性に気付き，次にβ_nは n が大きくなると，その絶対値がごく小さい値となり，a_nとα_nの値には，違いがほとんどないという感覚が必要です。