1

解答解説のページへ

2 つの放物線$C: y=-(x+1)^2$と$D: y=(x-1)^2+1$の 2 本の共通接線を求めよ。また, C, Dの 2 本の共通接線とCの囲む部分の面積を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

放物線 $y=(x-p)^2-2$ が，3 点 $(0,\ 0)$，$(1,\ 2)$，$(0,\ 2)$ を頂点とする三角形と交わるような実数 p の範囲を求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

袋の中に赤の玉と白の玉が合計 4 個入っている。1 回の試行では袋から 1 個の玉を無作為に取り出し，それが白であれば袋に戻し，赤の玉の場合は戻さずに別に用意した白の玉 1 個を袋に入れる。

(1) 最初は赤の玉と白の玉が 2 個ずつであるとして，3 回以下の試行で袋の中が白の玉 4 個となる確率を求めよ。

(2) 最初は赤の玉が 3 個，白の玉が 1 個であるとして，5 回以下の試行で袋の中が白の玉 4 個となる確率を求めよ。

4

解答解説のページへ

四面体 OABC において，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく。線分 OA, OB, OC, BC, CA, AB の中点をそれぞれ L，M，N，P，Q，R とし，$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{LP}}$，$\vec{q}=\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$，$\vec{r}=\overrightarrow{\mathrm{NR}}$ とおく。

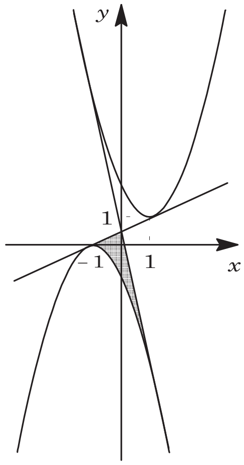
(1)　線分 LP, MQ, NR は 1 点で交わることを示せ。

(2)　$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を $\vec{p}$，$\vec{q}$，$\vec{r}$ を用いて表せ。

(3)　直線 LP，MQ，NR が互いに直交するとする。X を $\overrightarrow{\mathrm{AX}}=\overrightarrow{\mathrm{LP}}$ となる空間の点とするとき，四面体 XABC の体積を $|\vec{p}|$，$|\vec{q}|$，$|\vec{r}|$ を用いて表せ。

1

問題のページへ



$C: y=-(x+1)^2$ ………①，$D: y=(x-1)^2+1$ ………②とする。

まず，①上の点 $(t,\ -(t+1)^2)$ における接線の方程式は，$y'=-2(x+1)$ から，

$$y+(t+1)^2=-2(t+1)(x-t)$$

$$y=-2(t+1)x+t^2-1 \text{ ………③}$$

②と③が接することより，$(x-1)^2+1=-2(t+1)x+t^2-1$

$$x^2+2tx-t^2+3=0$$

$D/4=t^2-(-t^2+3)=0$ から，$2t^2-3=0$，$t=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

③に代入して，共通接線の方程式は，

$$y=-(\sqrt{6}+2)x+\frac{1}{2} \text{ ………④，} \quad y=(\sqrt{6}-2)x+\frac{1}{2} \text{ ………⑤}$$

すると，④と⑤の交点は，$\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ となるので，求める網点部の面積 S は，

$$S=\int_{-\frac{\sqrt{6}}{2}}^{0}\left\{(\sqrt{6}-2)x+\frac{1}{2}+(x+1)^2\right\}dx+\int_{0}^{\frac{\sqrt{6}}{2}}\left\{-(\sqrt{6}+2)x+\frac{1}{2}+(x+1)^2\right\}dx$$

$$=\int_{-\frac{\sqrt{6}}{2}}^{0}\left(x+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2dx+\int_{0}^{\frac{\sqrt{6}}{2}}\left(x-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2dx$$

$$=\frac{1}{3}\left[\left(x+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3\right]_{-\frac{\sqrt{6}}{2}}^{0}+\frac{1}{3}\left[\left(x-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3\right]_{0}^{\frac{\sqrt{6}}{2}}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3+\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

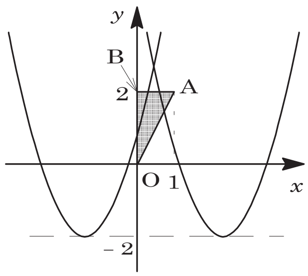
[解 説]

2 つの放物線の共通接線を題材にした頻出問題です。

2

問題のページへ

まず，O$(0,\ 0)$，A$(1,\ 2)$，B$(0,\ 2)$ とし，放物線 $y=(x-p)^2-2$ に対して，$f(x,\ y)=(x-p)^2-y-2$ とおく。



放物線と△OAB が交わる条件は，右図から，放物線が線分 OA または OB の少なくとも一方と交わることである。

(i)　放物線が線分 OA と交わるとき

$f(0,\ 0)\cdot f(1,\ 2)\leqq 0$ より，$(p^2-2)\{(1-p)^2-4\}\leqq 0$

$$(p+\sqrt{2})(p-\sqrt{2})(p+1)(p-3)\leqq 0$$

$$-\sqrt{2}\leqq p\leqq -1,\ \ \sqrt{2}\leqq p\leqq 3$$

(ii)　放物線が線分 OB と交わるとき

$f(0,\ 0)\cdot f(0,\ 2)\leqq 0$ より，$(p^2-2)(p^2-4)\leqq 0$

$$(p+\sqrt{2})(p-\sqrt{2})(p+2)(p-2)\leqq 0$$

$$-2\leqq p\leqq -\sqrt{2},\ \ \sqrt{2}\leqq p\leqq 2$$

(i)(ii)より，放物線と△OAB が交わる条件は，$-2\leqq p\leqq -1,\ \sqrt{2}\leqq p\leqq 3$

［解 説］

放物線が線分 AB だけと交わる場合のないことが，図からわかります。なお，正領域・負領域の考え方を利用して，p の範囲を求めました。

3

問題のページへ

(1) (i)　2 回の試行で白玉が 4 個となるとき

赤・赤と取り出す場合で，その確率は，$\dfrac{2}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{8}$

(ii) 3 回の試行で白玉が初めて 4 個となるとき

赤・白・赤または白・赤・赤と取り出す場合で，その確率は，

$$\frac{2}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{32}$$

(i)(ii)より，3 回以下の試行で白玉 4 個となる確率は，$\dfrac{1}{8}+\dfrac{5}{32}=\dfrac{9}{32}$

(2) (i)　3 回の試行で白玉が 4 個となるとき

赤・赤・赤と取り出す場合で，その確率は，$\dfrac{3}{4}\times\dfrac{2}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{32}$

(ii) 4 回の試行で白玉が初めて 4 個となるとき

赤・赤・白・赤または赤・白・赤・赤または白・赤・赤・赤と取り出す場合で，その確率は，

$$\frac{3}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{18}{128}$$

(iii) 5 回の試行で白玉が初めて 4 個となるとき

まず，4 回目が白のときは，赤・赤・白・白・赤または赤・白・赤・白・赤または白・赤・赤・白・赤と取り出す場合で，その確率は，

$$\frac{3}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{54}{512}$$

また，4 回目が赤のときは，赤・白・白・赤・赤または白・赤・白・赤・赤または白・白・赤・赤・赤と取り出す場合で，その確率は，

$$\frac{3}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{21}{512}$$

合わせると，$\dfrac{54}{512}+\dfrac{21}{512}=\dfrac{75}{512}$

(i)(ii)(iii)より，5 回以下の試行で白玉 4 個となる確率は，$\dfrac{3}{32}+\dfrac{18}{128}+\dfrac{75}{512}=\dfrac{195}{512}$

［解 説］

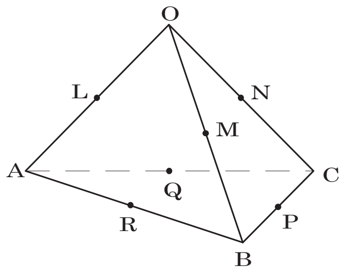
ケアレスミスを避けようとすると，神経が磨り減り，本当に疲れてしまいます。

4

問題のページへ

(1)　線分 LP の中点を S とすると,

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OL}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}})=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$



これから, $\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}})$ と表せ, 点 S は線分 MQ の中点に一致する。

また, $\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{ON}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}})$ とも表せるので, S は線分 NR の中点にも一致する。

よって, 線分 LP, MQ, NR は 1 点で交わる。

(2)　条件より, $\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{LP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\frac{1}{2}(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$………①

$$\vec{q}=\overrightarrow{\mathrm{MQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})\cdots\cdots\cdots②$$

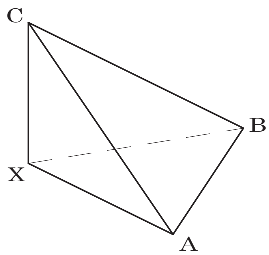
$$\vec{r}=\overrightarrow{\mathrm{NR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})\cdots\cdots\cdots③$$

②③より $\vec{a}=\vec{q}+\vec{r}$, ①③より $\vec{b}=\vec{p}+\vec{r}$, ①②より $\vec{c}=\vec{p}+\vec{q}$

(3)　条件より, $\overrightarrow{\mathrm{XA}}=-\overrightarrow{\mathrm{AX}}=-\overrightarrow{\mathrm{LP}}=-\vec{p}$

$$\overrightarrow{\mathrm{XB}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AX}}=\vec{b}-\vec{a}-\vec{p}=\vec{p}+\vec{r}-\vec{q}-\vec{r}-\vec{p}=-\vec{q}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{XC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AX}}=\vec{c}-\vec{a}-\vec{p}=\vec{p}+\vec{q}-\vec{q}-\vec{r}-\vec{p}=-\vec{r}$$



$\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ が互いに直交することより, 四面体 XABC の体積は,

$$\frac{1}{3}\Bigl(\frac{1}{2}|\vec{p}||\vec{q}|\Bigr)|\vec{r}|=\frac{1}{6}|\vec{p}||\vec{q}||\vec{r}|$$

［解 説］

(3)で与えられた条件によって, 四面体 OABC の 4 つの面は合同になります。このとき, この四面体は直方体に埋め込まれるということが元になっています。ずいぶん前になりますが, 1993 年に東大・理で, この考え方を利用する問題が出ています。