1

解答解説のページへ

a, b は実数であり，方程式 $x^4+(a+2)x^3-(2a+2)x^2+(b+1)x+a^3=0$ が解 $x=1+i$ をもつとする。ただし，$i=\sqrt{-1}$ とする。このとき a, b を求めよ。また，このときの方程式の他の解も求めよ。

2

解答解説のページへ

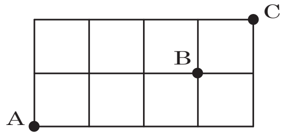
$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ として，x の関数 $f(x)$ を $f(x)=x^2+\dfrac{2\cos\theta}{\sqrt{3}}x-2\sin\theta$ と定める。x が整数を動くときの $f(x)$ の最小値を $m(\theta)$ とおく。

(1)　θ が $\cos\theta \geqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす場合に，$m(\theta)$ が最小となる θ の値を求めよ。

(2)　$m(\theta)$ が最小となる θ の値と，そのときの最小値を求めよ。

3

解答解説のページへ



右の図のような格子状の道路がある。左下の A 地点から出発し，サイコロを繰り返し振り，次の規則にしたがって進むものとする。1 の目が出たら右に 2 区画，2 の目が出たら右に 1 区画，3 の目が出たら上に 1 区画進み，その他の場合はそのまま動かない。ただし，右端で 1 または 2 の目が出たとき，あるいは上端で 3 の目が出たときは，動かない。また，右端の 1 区画手前で 1 の目が出たときは，右端まで進んで止まる。

n を 7 以上の自然数とする。A 地点から出発し，サイコロを n 回振るとき，ちょうど 6 回目に，B 地点に止まらずに B 地点を通り過ぎ，n 回目までに C 地点に到達する確率を求めよ。ただし，サイコロのどの目が出るのも，同様に確からしいものとする。

4

解答解説のページへ

$t \geqq 1$ において，関数 $f(t)=\int_{-1}^{1}|(x-t+2)(x+t)|\,dx$ を最小にする t の値と，そのときの最小値を求めよ。

1

問題のページへ

$x^4+(a+2)x^3-(2a+2)x^2+(b+1)x+a^3=0$……①に対して，$a$，$b$ が実数であることより，①が解 $x=1+i$ をもつとき，$x=1-i$ も解になる。

すると，①の左辺は $x^2-(1+i+1-i)x+(1+i)(1-i)=x^2-2x+2$ で割り切れる。

そこで，①の左辺を $f(x)$ とおき，x^2-2x+2 で割ると，

$$f(x)=(x^2-2x+2)\{x^2+(a+4)x+4\}+(-2a+b+1)x+a^3-8$$

よって，$-2a+b+1=0$……②，$a^3-8=0$……③

③より $a=2$，②に代入して $b=3$

このとき，$f(x)=(x^2-2x+2)(x^2+6x+4)$ となり，$x=1+i$ 以外の①の解は，$x=1-i$，$-3\pm\sqrt{5}$ である。

［解 説］

文理共通の第 1 問は基本題です。計算ミスには注意しましょう。

2

問題のページへ

(1)　$f(x)=x^2+\dfrac{2\cos\theta}{\sqrt{3}}x-2\sin\theta=\left(x+\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{3}}\right)^2-\dfrac{\cos^2\theta}{3}-2\sin\theta$ として，

$\cos\theta \geqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，$y=f(x)$ のグラフの軸 $x=-\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{3}}$ は，

$$-\frac{\sqrt{3}}{3}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\leqq-\frac{\cos\theta}{\sqrt{3}}\leqq-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=-\frac{1}{2}$$

x は整数値をとるので，$x=-1$ のとき $f(x)$ は最小値をとる。

$$m(\theta)=1-\frac{2\cos\theta}{\sqrt{3}}-2\sin\theta=1-\frac{2}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta)=1-\frac{4}{\sqrt{3}}\sin(\theta+30^\circ)$$

ここで，$\cos\theta\geqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より $0^\circ\leqq\theta\leqq30^\circ$ なので，$30^\circ\leqq\theta+30^\circ\leqq60^\circ$ となり，

$\theta+30^\circ=60^\circ$ すなわち $\theta=30^\circ$ のとき，$m(\theta)$ は最小値 $1-\dfrac{4}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=-1$ をとる。

(2)　$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ のとき，$-1\leqq\cos\theta\leqq1$ より，$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\leqq-\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{3}}\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(i)　$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\leqq-\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{3}}\leqq-\dfrac{1}{2}$ $(0^\circ\leqq\theta\leqq30^\circ)$ のとき

(1)より，$m(\theta)$ は $\theta=30^\circ$ のとき最小値 -1 をとる。

(ii)　$-\dfrac{1}{2}\leqq-\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{3}}\leqq\dfrac{1}{2}$ $(30^\circ\leqq\theta\leqq150^\circ)$ のとき

$x=0$ のとき $f(x)$ は最小値をとり，$m(\theta)=-2\sin\theta$ となる。

よって，$m(\theta)$ は $\theta=90^\circ$ のとき最小値 -2 をとる。

(iii)　$\dfrac{1}{2}\leqq-\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{3}}\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ $(150^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ)$ のとき

$x=1$ のとき $f(x)$ は最小値をとり，

$$m(\theta)=1+\frac{2\cos\theta}{\sqrt{3}}-2\sin\theta=1-\frac{2}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta)=1-\frac{4}{\sqrt{3}}\sin(\theta-30^\circ)$$

ここで，$150^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ なので，$120^\circ\leqq\theta-30^\circ\leqq150^\circ$ となり，$\theta-30^\circ=120^\circ$ すなわち $\theta=150^\circ$ のとき，$m(\theta)$ は最小値 $1-\dfrac{4}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=-1$ をとる。

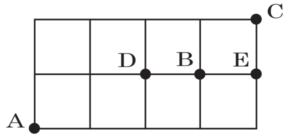
(i)(ii)(iii)より，$m(\theta)$ は $\theta=90^\circ$ のとき最小値 -2 をとる。

［解 説］

(1)は(2)の 1 つの場合になっています。難しいというよりは繁雑な感じのする問題です。

3

問題のページへ



6 回目に B を通り過ぎるという条件より, 6 回目では 1 の目が出て, D から E に進むことになり, その確率は $\frac{1}{6}$ である。

すると, 5 回目までに D に到達していることになり, A から D への進み方には次の 2 つの場合がある。

1 つは, 1 の目が 1 回出て, 3 の目が 1 回, 4 か 5 か 6 の目が 3 回出るときで, その確率は, $\frac{5!}{3!}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{72}$ である。

もう 1 つは, 2 の目が 2 回出て, 3 の目が 1 回, 4 か 5 か 6 の目が 2 回出るときで, その確率は, $\frac{5!}{2!2!}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{144}$ である。

よって, 5 回目までに D に到達している確率は, $\frac{5}{72}+\frac{5}{144}=\frac{5}{48}$ である。

さらに, 7 回目以降に E から C に進むには, 7 回目から n 回目までに, 3 が 1 回出ればよいので, その確率は,

$$\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\cdots+\left(\frac{5}{6}\right)^{n-7}\cdot\frac{1}{6}=\frac{\frac{1}{6}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-6}\right\}}{1-\frac{5}{6}}=1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-6}$$

以上より, n 回目までに C 地点に到達する確率は,

$$\frac{5}{48}\times\frac{1}{6}\times\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-6}\right\}=\frac{5}{288}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-6}\right\}$$

［解　説］

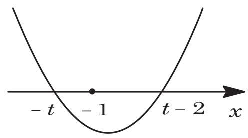
複雑な場合分けを予想しましたが, 6 回目が右に 2 区画進む場合だけなので, あっさり解決してしまいました。なお, 7 回目以降は余事象で考えた方が簡単でした。

4

問題のページへ

まず，$g(x)=(x-t+2)(x+t)$ とおくと，

$$f(t)=\int_{-1}^{1}|g(x)|dx$$



また，$g(x)=0$ の解は，$x=t-2,\ -t$ であるが，$t\geqq 1$ より $-t\leqq -1\leqq t-2$ となり，$g(x)$ のグラフは右図のようになる。

(i)　$t-2\geqq 1\ (t\geqq 3)$ のとき

$$f(t)=\int_{-1}^{1}-g(x)dx=-\int_{-1}^{1}(x^2+2x-t^2+2t)dx=-2\int_{0}^{1}(x^2-t^2+2t)dx$$

$$=-2\Big[\frac{x^3}{3}-(t^2-2t)x\Big]_0^1=2t^2-4t-\frac{2}{3}=2(t-1)^2-\frac{8}{3}$$

よって, $t\geqq 3$ のとき，$f(t)$ は単調に増加する。

(ii)　$t-2<1\ (1\leqq t<3)$ のとき

$$f(t)=\int_{-1}^{t-2}-g(x)dx+\int_{t-2}^{1}g(x)dx$$

$$=-\int_{-1}^{t-2}(x^2+2x-t^2+2t)dx+\int_{t-2}^{1}(x^2+2x-t^2+2t)dx$$

$$=-\Big[\frac{x^3}{3}+x^2-(t^2-2t)x\Big]_{-1}^{t-2}+\Big[\frac{x^3}{3}+x^2-(t^2-2t)x\Big]_{t-2}^{1}$$

$$=-\frac{2}{3}(t-2)^3-2(t-2)^2+2+2(t^2-2t)(t-2)$$

$$=-\frac{2}{3}(t-2)^3-2(t-2)^2+2+2t(t-2)^2$$

$$f'(t)=-2(t-2)^2-4(t-2)+2(3t-2)(t-2)$$

$$=(t-2)\{-2(t-2)-4+2(3t-2)\}$$

$$=4(t-2)(t-1)$$

t	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(t)$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$	2	$\nearrow$	

これより，$1\leqq t<3$ のとき，$f(t)$ の増減は右表のようになる。

(i)(ii)より，$f(t)$ は連続関数なので，$t=2$ のとき最小値 2 をとる。

［解 説］

$t\geqq 1$ という条件のために場合分けは減少しましたが, 積分の計算は, 簡単とはとうてい言えません。