1

解答解説のページへ

a，b は実数であり，方程式 $x^4+(a+2)x^3-(2a+2)x^2+(b+1)x+a^3=0$ が解 $x=1+i$ をもつとする。ただし，$i=\sqrt{-1}$ とする。このとき a，b を求めよ。また，このときの方程式の他の解も求めよ。

2

解答解説のページへ

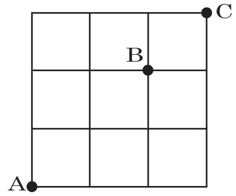
xy 平面上に，媒介変数 t により表示された曲線 $C: x = e^t - e^{-t}$， $y = e^{3t} + e^{-3t}$ がある。

(1) x の関数 y の増減と凹凸を調べ，曲線 C の概形を描け。

(2) 曲線 C, x 軸, 2 直線 $x = \pm 1$ で囲まれる部分の面積を求めよ。

3

解答解説のページへ



右の図のような格子状の道路がある。左下の A 地点から出発し，サイコロを繰り返し振り，次の規則にしたがって進むものとする。1 の目が出たら右に 2 区画，2 の目が出たら右に 1 区画，3 の目が出たら上に 1 区画進み，その他の場合はそのまま動かない。ただし，右端で 1 または 2 の目が出たとき，あるいは上端で 3 の目が出たときは，動かない。また，右端の 1 区画手前で 1 の目が出たときは，右端まで進んで止まる。

n を 8 以上の自然数とする。A 地点から出発し，サイコロを n 回振るとき，ちょうど 6 回目に，B 地点以外の地点から進んで B 地点に止まり，n 回目までに C 地点に到達する確率を求めよ。ただし，サイコロのどの目が出るのも，同様に確からしいものとする。

4

解答解説のページへ

四面体 ABCD は各辺の長さが 1 の正四面体とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = l\overrightarrow{\mathrm{AB}} + m\overrightarrow{\mathrm{AC}} + n\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ で与えられる点 P に対し $|\overrightarrow{\mathrm{BP}}| = |\overrightarrow{\mathrm{CP}}| = |\overrightarrow{\mathrm{DP}}|$ が成り立つならば，$l = m = n$ であることを示せ。また，このときの $|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|$ を l を用いて表せ。

(2)　A, B, C, D のいずれとも異なる空間内の点 P と点 Q を，四面体 PBCD と四面体 QABC がともに正四面体になるようにとるとき，$\cos\angle\mathrm{PBQ}$ の値を求めよ。

5

解答解説のページへ

$a>b>0$ とし，xy 平面の楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の第 1 象限の部分を E とする。ただし，第 1 象限には x 軸と y 軸は含まれない。E 上の点 P における E の接線と法線が y 軸と交わる点の y 座標をそれぞれ h と k とし，$L=h-k$ とおく。点 P が E 上を動くとき，L の最小値が存在するための a と b についての条件と，そのときの L の最小値を求めよ。

6

解答解説のページへ

$f_1(x)$ は実数全体で定義された何回でも微分可能な関数とする。$f_2(x)$，$f_3(x)$，…をつぎのように順次定義する。$n=2,\ 3,\ \cdots$ に対し，$F_{n-1}(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)\,dt$ とおいて，$f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)F_{n-1}(t)\,dt$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$n \geqq 2$ のとき，すべての x に対して $f_n(x) \geqq 0$ であることを示せ。

(2)　$n \geqq 3$ のとき，すべての $x \geqq 0$ に対して $f_n{}'(x) \geqq 0$ であることを示せ。

(3)　$f_4{}'(1)=0$ のとき，すべての $0 \leqq x \leqq 1$ に対して $f_1(x)=0$ であることを示せ。

1

問題のページへ

$x^4+(a+2)x^3-(2a+2)x^2+(b+1)x+a^3=0$ ……①に対して，a，b が実数であることより，①が解 $x=1+i$ をもつとき，$x=1-i$ も解になる。

すると，①の左辺は $x^2-(1+i+1-i)x+(1+i)(1-i)=x^2-2x+2$ で割り切れる。

そこで，①の左辺を $f(x)$ とおき，x^2-2x+2 で割ると，

$$f(x)=(x^2-2x+2)\{x^2+(a+4)x+4\}+(-2a+b+1)x+a^3-8$$

よって，$-2a+b+1=0$ ……②，$a^3-8=0$ ……③

③より $a=2$，②に代入して $b=3$

このとき，$f(x)=(x^2-2x+2)(x^2+6x+4)$ となり，$x=1+i$ 以外の①の解は，$x=1-i$，$-3\pm\sqrt{5}$ である。

［解 説］

文理共通の第１問は基本題です。計算ミスには注意しましょう。

2

問題のページへ

(1)　$x=e^t-e^{-t}$，$y=e^{3t}+e^{-3t}$より，$\dfrac{dx}{dt}=e^t+e^{-t}$，$\dfrac{dy}{dt}=3e^{3t}-3e^{-3t}$

$\dfrac{dx}{dt}>0$より, t の増加に伴って x は単調に増加する。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3e^{3t}-3e^{-3t}}{e^t+e^{-t}}=\frac{3(e^{3t}-e^{-3t})}{e^t+e^{-t}}$$

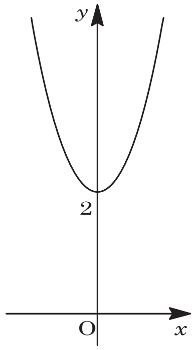
$\dfrac{dy}{dx}=0$ とすると，$e^{3t}=e^{-3t}$ から $t=0$ となり，このとき $x=0$，$y=2$ である。

x	$-\infty$	$\cdots$	0	$\cdots$	∞
$\dfrac{dy}{dx}$		$-$	0	$+$	
y	∞	$\searrow$	2	$\nearrow$	∞

また，$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}y=\lim_{t\to\pm\infty}(e^{3t}+e^{-3t})=\infty$ である。

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}$$
$$=\frac{9(e^{3t}+e^{-3t})(e^t+e^{-t})-3(e^{3t}-e^{-3t})(e^t-e^{-t})}{(e^t+e^{-t})^2}\cdot\frac{1}{e^t+e^{-t}}$$
$$=\frac{6(e^{4t}+2e^{2t}+2e^{-2t}+e^{-4t})}{(e^t+e^{-t})^3}>0$$

したがって，曲線 C はつねに下に凸となり，その概形は右図のようになる。



(2)　$x=f(t)$，$y=g(t)$とおくとき，

$$f(-t)=e^{-t}-e^t=-f(t),\quad g(-t)=e^{-3t}+e^{3t}=g(t)$$

よって，曲線 C は y 軸に関して対称となる。

さて，$x=0$ のとき $t=0$ であり，$x=1$ のとき $e^t-e^{-t}=1$，$e^{2t}-e^t-1=0$ から $e^t=\dfrac{1+\sqrt5}{2}$，$t=\log\dfrac{1+\sqrt5}{2}$ となる。

求める面積 S は，$\alpha=\log\dfrac{1+\sqrt5}{2}$ とおくと，

$$S=2\int_0^1 y\,dx=2\int_0^\alpha(e^{3t}+e^{-3t})(e^t+e^{-t})\,dt=2\int_0^\alpha(e^{4t}+e^{2t}+e^{-2t}+e^{-4t})\,dt$$
$$=2\left[\frac14e^{4t}+\frac12e^{2t}-\frac12e^{-2t}-\frac14e^{-4t}\right]_0^\alpha=\frac12(e^{4\alpha}-e^{-4\alpha})+(e^{2\alpha}-e^{-2\alpha})$$

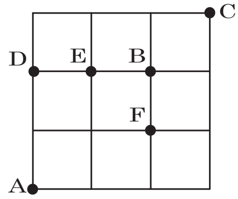
ここで，$e^\alpha=\dfrac{1+\sqrt5}{2}$，$e^{-\alpha}=\dfrac{-1+\sqrt5}{2}$ より，$e^\alpha+e^{-\alpha}=\sqrt5$，$e^\alpha-e^{-\alpha}=1$ なので，$e^{2\alpha}-e^{-2\alpha}=\sqrt5\times1=\sqrt5$ となる。さらに，$e^{2\alpha}+e^{-2\alpha}=(e^\alpha+e^{-\alpha})^2-2=3$ より，$e^{4\alpha}-e^{-4\alpha}=3\times\sqrt5=3\sqrt5$ となり，$S=\dfrac12\cdot3\sqrt5+\sqrt5=\dfrac52\sqrt5$

［解 説］

パラメータ表示された曲線に関する基本問題ですが，計算はやや難です。

3

問題のページへ



6 回目に B 以外の地点から進んで B に止まるという条件より, 6 回目では D→B, E→B, F→B のいずれかになる。

(i)　6 回目が D→B のとき

6 回目では 1 の目が出ることになり, その確率は$\dfrac{1}{6}$である。

すると, 5 回目までに D に到達していることになり, A→D と進むには, 3 の目が 2 回出て, 4 か 5 か 6 の目が 3 回出ればよく, その確率は, $\dfrac{5!}{2!3!}\cdot\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{5}{144}$である。

(ii)　6 回目が E→B のとき

6 回目では 2 の目が出ることになり, その確率は$\dfrac{1}{6}$である。

すると, 5 回目までに E に到達していることになり, A→E と進むには, 2 の目が 1 回, 3 の目が 2 回出て, 4 か 5 か 6 の目が 2 回出ればよく, その確率は, $\dfrac{5!}{2!2!}\cdot\dfrac{1}{6}\cdot\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{144}$である。

(iii) 6 回目が F→B のとき

6 回目では 3 の目が出ることになり, その確率は$\dfrac{1}{6}$である。

すると, 5 回目までに F に到達していることになり, A→F と進むには次の 2 つの場合がある。1 つは, 1 の目が 1 回出て, 3 の目が 1 回, 4 か 5 か 6 の目が 3 回出るときで, その確率は$\dfrac{5!}{3!}\cdot\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{6}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{5}{72}$である。もう 1 つは, 2 の目が 2 回出て, 3 の目が 1 回, 4 か 5 か 6 の目が 2 回出るときで, その確率は$\dfrac{5!}{2!2!}\cdot\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\cdot\dfrac{1}{6}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{144}$である。よって, 5 回目までに F に到達している確率は, $\dfrac{5}{72}+\dfrac{5}{144}=\dfrac{5}{48}$である。

(i)(ii)(iii)より, 6 回目に B に到達する確率は,

$$\frac{1}{6}\times\frac{5}{144}+\frac{1}{6}\times\frac{5}{144}+\frac{1}{6}\times\frac{5}{48}=\frac{25}{864}\cdots\cdots\cdots①$$

次に, 7 回目以降に B→C と進むには, 7 回目から n 回目までに, 1 か 2 の目が少なくとも 1 回出て, しかも 3 の目が少なくとも 1 回出ればよい。

ここで, 1 か 2 の目が少なくとも 1 回出るという事象を X, 3 の目が少なくとも 1 回出るという事象を Y とおくと, それぞれ余事象の確率は,

$$P(\overline{X})=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-6},\ P(\overline{Y})=\left(\frac{5}{6}\right)^{n-6}$$

また, $\overline{X}\cap\overline{Y}$ は 4 か 5 か 6 の目だけ出るという事象を表すので, その確率は,

$$P(\overline{X}\cap\overline{Y})=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-6}$$

$$\begin{aligned} P(X\cap Y) &= 1-P(\overline{X\cap Y}) = 1-P(\overline{X}\cup\overline{Y}) \\ &= 1-\{P(\overline{X})+P(\overline{Y})-P(\overline{X}\cap\overline{Y})\} \\ &= 1-P(\overline{X})-P(\overline{Y})+P(\overline{X}\cap\overline{Y}) \\ &= 1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-6}-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-6}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-6} \cdots\cdots\cdots ② \end{aligned}$$

①②より, n 回目までに C 地点に到達する確率は,

$$\frac{25}{864}\times P(X\cap Y)=\frac{25}{864}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-6}-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-6}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-6}\right\}$$

［解 説］

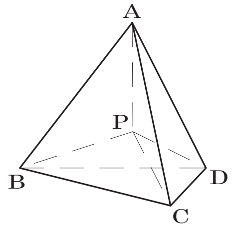
文系に類題があるのですが, 理系の本問の方がかなり難しくなっています。というのも, A→B の確率を求めるのと B→C の確率を求めるには, 異なる方法が必要で, 1 つの問題の中に 2 つの問題が入っているのと同じことだからです。

4

問題のページへ

(1) 四面体ABCDは各辺の長さが1の正四面体なので，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AD}|=1$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=1\cdot1\cdot\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$$



ここで，$\overrightarrow{AP}=l\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{AC}+n\overrightarrow{AD}$より，

$$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}=(l-1)\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{AC}+n\overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC}=l\overrightarrow{AB}+(m-1)\overrightarrow{AC}+n\overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AD}=l\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{AC}+(n-1)\overrightarrow{AD}$$

すると，$|\overrightarrow{BP}|^2=|(l-1)\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{AC}+n\overrightarrow{AD}|^2$

$$=(l-1)^2+m^2+n^2+2(l-1)m\cdot\frac{1}{2}+2mn\cdot\frac{1}{2}+2n(l-1)\cdot\frac{1}{2}$$
$$=(l-1)^2+m^2+n^2+(l-1)m+mn+n(l-1)\cdots\cdots\cdots①$$

同様にして，$|\overrightarrow{CP}|^2=l^2+(m-1)^2+n^2+l(m-1)+(m-1)n+nl\cdots\cdots\cdots②$

$$|\overrightarrow{DP}|^2=l^2+m^2+(n-1)^2+lm+m(n-1)+(n-1)l\cdots\cdots\cdots③$$

$|\overrightarrow{BP}|=|\overrightarrow{CP}|$なので，①②から，$-2l+1-m-n=-2m+1-l-n$，$m=l$

$|\overrightarrow{CP}|=|\overrightarrow{DP}|$なので，②③から，$-2m+1-l-n=-2n+1-m-l$，$n=m$

したがって，$l=m=n$となり，このとき①より，

$$|\overrightarrow{BP}|^2=(l-1)^2+l^2+l^2+(l-1)l+l^2+l(l-1)=6l^2-4l+1$$

よって，$|\overrightarrow{BP}|=\sqrt{6l^2-4l+1}$

(2) 四面体PBCDが正四面体より, (1)を用いて，$|\overrightarrow{BP}|^2=6l^2-4l+1=1$

$l\neq0$から$l=\dfrac{2}{3}$なので，$\overrightarrow{BP}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

同様にして，四面体QABCが正四面体なので，$\overrightarrow{DQ}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{DA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{DB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{DC}$

$$\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AD}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})+\frac{2}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}),\quad \overrightarrow{AQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$$

すると，$\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AB}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$

これより，$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BQ}=\left(-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\right)$

$$=\frac{1}{9}-\frac{1}{9}+\frac{1}{6}-\frac{1}{9}+\frac{4}{9}-\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{2}{9}-\frac{2}{3}=-\frac{7}{18}$$

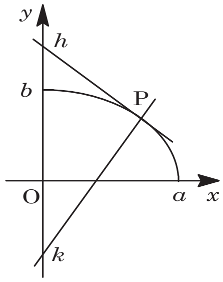
以上より，$|\overrightarrow{BP}|=|\overrightarrow{BQ}|=1$から，$\cos\angle PBQ=\dfrac{\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BQ}}{|\overrightarrow{BP}||\overrightarrow{BQ}|}=-\dfrac{7}{18}$

［解 説］

空間ベクトルの基本を問う問題ですが，計算量はあります。

5

問題のページへ



点 P は楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の第 1 象限の部分にあるので，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ として，$\mathrm{P}(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ とおく。

接線の方程式は，$\dfrac{a\cos\theta}{a^2}x+\dfrac{b\sin\theta}{b^2}=1$，$\dfrac{\cos\theta}{a}x+\dfrac{\sin\theta}{b}y=1$

$x=0$ とすると，$y=\dfrac{b}{\sin\theta}$ より，$h=\dfrac{b}{\sin\theta}$

また，法線は，その法線ベクトルを $\left(-\dfrac{\sin\theta}{b},\ \dfrac{\cos\theta}{a}\right)$ とすることができるので，

$$-\frac{\sin\theta}{b}(x-a\cos\theta)+\frac{\cos\theta}{a}(y-b\sin\theta)=0$$

$x=0$ とすると，$y=b\sin\theta-\dfrac{a^2\sin\theta}{b}=\dfrac{b^2-a^2}{b}\sin\theta$ より，$k=\dfrac{b^2-a^2}{b}\sin\theta$

$$L=h-k=\frac{b}{\sin\theta}-\frac{b^2-a^2}{b}\sin\theta$$

ここで，$t=\sin\theta$ とおくと, $0<t<1$ となり，$L=\dfrac{b}{t}-\dfrac{b^2-a^2}{b}t$

$$\frac{dL}{dt}=-\frac{b}{t^2}-\frac{b^2-a^2}{b}=\frac{(a^2-b^2)t^2-b^2}{bt^2}$$
$$=\frac{(\sqrt{a^2-b^2}\,t+b)(\sqrt{a^2-b^2}\,t-b)}{bt^2}$$

t	0	$\cdots$	$\dfrac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}$	$\cdots$
$\dfrac{dL}{dt}$		$-$	0	$+$
L		↘		↗

$t>0$ における t の増減は右表のようになり，$0<t<1$ において L の最小値が存在する条件は，$\dfrac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}<1$ である。

よって，$b<\sqrt{a^2-b^2}$，$a^2-2b^2>0$

このとき, L の最小値は，$b\cdot\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}-\dfrac{b^2-a^2}{b}\cdot\dfrac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}=2\sqrt{a^2-b^2}$ となる。

[解 説]

楕円上の点をパラメータ表示し，題意にしたがって計算をしていけば，正解にたどり着けます。

6

問題のページへ

(1)　$F_{n-1}(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)\,dt$ ……①，$f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)F_{n-1}(t)\,dt$ ……②に対して，

①より，$F_{n-1}{}'(x)=f_{n-1}(t)$，$F_{n-1}(0)=0$

②に代入して，$n\geqq 2$ のとき，

$$f_n(x)=\int_0^x F_{n-1}{}'(t)F_{n-1}(t)\,dt=\frac{1}{2}\Big[\{F_{n-1}(t)\}^2\Big]_0^x$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\{F_{n-1}(x)\}^2-\{F_{n-1}(0)\}^2\Big]=\frac{1}{2}\{F_{n-1}(x)\}^2 \cdots\cdots\cdots ③$$

したがって，$n\geqq 2$ のとき，$f_n(x)\geqq 0$

(2)　(1)より，$f_n(x)\geqq 0\ (n\geqq 2)$ なので，$f_{n-1}(x)\geqq 0\ (n\geqq 3)$

すると，$x\geqq 0$ のとき，①より $F_{n-1}(x)\geqq 0$ となる。

ここで，②より，$f_n{}'(x)=f_{n-1}(x)F_{n-1}(x)$ ………④

したがって，$n\geqq 3$ のとき，$x\geqq 0$ で $f_n{}'(x)\geqq 0$

(3)　条件より $f_4{}'(1)=0$ なので，④から $f_3(1)F_3(1)=0$ ………⑤

さて，(2)より $x\geqq 0$ のとき $f_3{}'(x)\geqq 0$ なので $f_3(0)\leqq f_3(1)$ となる。さらに，②より $f_n(0)=0\ (n\geqq 2)$ なので，$f_3(0)=0$ となり，

$$0=f_3(0)\leqq f_3(1) \cdots\cdots\cdots ⑥$$

ここで，⑤から $f_3(1)=0$ または $F_3(1)=0$ となるが，$F_3(1)=\int_0^1 f_3(t)\,dt=0$ のときも，⑥より $f_3(1)=0$ となるので，⑤は $f_3(1)=0$ と同値である。

よって，$0\leqq x\leqq 1$ において $f_3(x)=0$

すると，③より $0\leqq x\leqq 1$ において，$\frac{1}{2}\{F_2(x)\}^2=0$ となり，

$$F_2(x)=\int_0^x f_2(t)\,dt=0$$

(1)より $f_2(x)\geqq 0$ なので，$0\leqq x\leqq 1$ において $f_2(x)=0$

同様にして，③より $0\leqq x\leqq 1$ において，$\frac{1}{2}\{F_1(x)\}^2=0$ より，

$$F_1(x)=\int_0^x f_1(t)\,dt=0 \cdots\cdots\cdots ⑦$$

⑦の両辺を微分すると，$f_1(x)$ が連続関数ということより，$0\leqq x\leqq 1$ において $f_1(x)=0$ となる。

[解 説]

論理を詰めていく問題です。特に(3)は，$n=4$ から $n=3$ へ，$n=3$ から $n=2$ へ，$n=2$ から $n=1$ へと論証しなくてはいけないので，神経が疲れてしまいます。