1

解答解説のページへ

実数 a に対して，集合 A, B を

$$A=\left\{x \mid x^2+(1-a^2)x+a^3-2a^2+a \leqq 0,\ \ x\text{は実数}\right\}$$

$$B=\left\{x \mid x^2+(2a-7)x+a^2-7a+10<0,\ \ x\text{は実数}\right\}$$

と定める。共通部分 $A\cap B$ が空集合でないための a の範囲を求めよ。

2

解答解説のページへ

三角形 ABC において，$AB=1$，$AC=2$，$\angle A=60^\circ$ とする。正の数 $m,\ n$ に対し，辺 BC, CA, AB を $m:n$ の比に内分する点を順に D, E, F とする。

(1) $\overrightarrow{DE}$ と $\overrightarrow{EF}$ が垂直であるときの比 $m:n$ を求めよ。

(2) どのような正の整数 m, n に対しても，$\overrightarrow{AD}$ と $\overrightarrow{EF}$ は垂直でないことを示せ。

3

解答解説のページへ

ある人がバス停 A で A 発 B 行きのバスに乗り，バス停 B で B 発 C 行きのバスに乗りかえてバス停 C へ向かうものとする。バスの発車時刻，バス停での待ち時間，バスの乗車時間は次の 5 つの条件を満たすものとする。

1. A 発 B 行きおよび B 発 C 行きのバスは同時刻に 3 分おきで発車している。
2. バス停 A での待ち時間は 0 分または 1 分または 2 分で，それぞれの起こる確率は $\frac{1}{3}$ である。
3. バス停 B に到着後，最初に発車する C 行きのバスに乗りかえる。
4. A 発 B 行きのバスの乗車時間は 8 分または 10 分で，それぞれの起こる確率は $\frac{1}{2}$ である。
5. B 発 C 行きのバスの乗車時間は 6 分または 7 分で，それぞれの起こる確率は $\frac{1}{2}$ である。

ただし，条件 2，4，5 において，待ち時間，乗車時間の起こり方は独立であるとする。

この人がバス停 A に到着後バス停 C へ到着するまでにかかる時間が n 分である確率 $P(n)$ を求めよ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

2 つの関数を

$$t=\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta\,,\quad y=-4\cos 3\theta+\cos 2\theta-\sqrt{3}\sin 2\theta+2\cos\theta+2\sqrt{3}\sin\theta$$

とする。

(1)　$\cos 3\theta$ を t の関数で表せ。

(2)　y を t の関数で表せ。

(3)　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき, y の最大値, 最小値とそのときの θ の値を求めよ。

1

問題のページへ

まず，$x^2+(1-a^2)x+a^3-2a^2+a\leqq 0$ ……①から，

$$x^2+(1-a^2)x+a(a-1)^2\leqq 0,\ \{x-(a^2-a)\}\{x-(a-1)\}\leqq 0$$

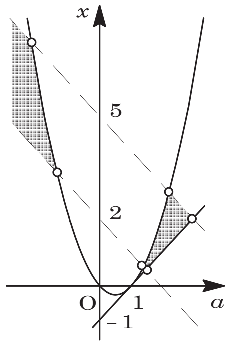
ここで，$(a^2-a)-(a-1)=(a-1)^2\geqq 0$ より，$a^2-a\geqq a-1$ となり，①の解は，$a-1\leqq x\leqq a^2-a$ ……②である。

次に，$x^2+(2a-7)x+a^2-7a+10<0$ ……③から，

$$x^2+(2a-7)x+(a-2)(a-5)<0,\ (x+a-2)(x+a-5)<0$$

すると，$-a+2<-a+5$ より，③の解は，$-a+2<x<-a+5$ ……④である。

さて，$x=a-1$ ……⑤，$x=a^2-a=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$ ……⑥，$x=-a+2$ ……⑦，$x=-a+5$ ……⑧のグラフをかき，②と④をともにみたす$(a,\ x)$を図示すると，右図の網点部となる。



⑥と⑦の交点は，$a^2-a=-a+2$ より $a=\pm\sqrt{2}$，⑤と⑧の交点は，$a-1=-a+5$ より $a=3$ である。

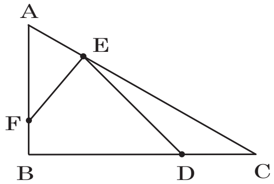
以上より，①と③をみたす x が存在する条件は，$a<-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}<a<3$ である。

［解 説］

不等式の解が a の値で場合分けということを覚悟して臨みましたが，意外にも，その必要はありませんでした。なお，後半は，⑤～⑧の大小関係を把握するのにグラフを用いました。

2

問題のページへ



(1)　まず，$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{AC}-\dfrac{n\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{AC}}{m+n}$

$$=\frac{-n}{m+n}\overrightarrow{AB}+\frac{n-m}{m+n}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}=\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}-\frac{n}{m+n}\overrightarrow{AC}$$

さて，$\overrightarrow{DE}\perp\overrightarrow{EF}$より，$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{EF}=0$となり，

$$\{-n\overrightarrow{AB}+(n-m)\overrightarrow{AC}\}\cdot(m\overrightarrow{AB}-n\overrightarrow{AC})=0$$

条件より，$|\overrightarrow{AB}|=1$，$|\overrightarrow{AC}|=2$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\cdot2\cos60^\circ=1$なので，

$$-mn\cdot1^2+(n^2+mn-m^2)\cdot1+(-n^2+mn)\cdot2^2=0$$

$$m^2-4mn+3n^2=0,\ (m-3n)(m-n)=0$$

$m=3n$，$m=n$より，$m:n=3:1$または$m:n=1:1$である。

(2)　$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{EF}=\dfrac{1}{(m+n)^2}(n\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{AC})\cdot(m\overrightarrow{AB}-n\overrightarrow{AC})$

$$=\frac{1}{(m+n)^2}\{mn\cdot1^2+(m^2-n^2)\cdot1-mn\cdot2^2\}$$

$$=\frac{1}{(m+n)^2}(m^2-3mn-n^2)$$

ここで，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{EF}=0$と仮定すると，$m^2-3mn-n^2=0$から$m=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}n$となるので, m, nが正の整数のとき$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{EF}=0$は成立しない。すなわち，どのような正の整数$m$, nに対しても，$\overrightarrow{AD}$と$\overrightarrow{EF}$が垂直になる場合はない。

［解 説］

ベクトルの内積についての基本的な問題です。オーソドックスに計算を進めていけば，結論が導けます。

3

問題のページへ

A 発 B 行きのバスと B 発 C 行きのバスは，同時刻に 3 分おきで発車しているので，A 発 B 行きのバスに 8 分乗車したときはバス停 B で 1 分待ち，10 分乗車したときはバス停 B で 2 分待つことになる。

すると，バス停 A での待ち時間, A から B への乗車時間，バス停 B での待ち時間, B から C への乗車時間という 4 つの時間の組について，次の 12 通りの場合が考えられる。ただし，単位を分とする。

$(0,\ 8,\ 1,\ 6)$，$(1,\ 8,\ 1,\ 6)$，$(2,\ 8,\ 1,\ 6)$，$(0,\ 8,\ 1,\ 7)$

$(1,\ 8,\ 1,\ 7)$，$(2,\ 8,\ 1,\ 7)$，$(0,\ 10,\ 2,\ 6)$，$(1,\ 10,\ 2,\ 6)$

$(2,\ 10,\ 2,\ 6)$，$(0,\ 10,\ 2,\ 7)$，$(1,\ 10,\ 2,\ 7)$，$(2,\ 10,\ 2,\ 7)$

この 12 通りの場合は同様に確からしく，合計の時間が 15 分，21 分になる場合がそれぞれ 1 通りずつ，合計の時間が 16 分, 17 分, 18 分, 19 分, 20 分になる場合がそれぞれ 2 通りずつあるので，

$$P(15)=P(21)=\frac{1}{12},\quad P(16)=P(17)=P(18)=P(19)=P(20)=\frac{1}{6}$$

なお, $n\leqq 14$ または $22\leqq n$ のときは，$P(n)=0$ である。

［解 説］

読解力だけの問題です。

4

問題のページへ

(1)　$t^3=(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)^3=\cos^3\theta+3\sqrt{3}\cos^2\theta\sin\theta+9\cos\theta\sin^2\theta+3\sqrt{3}\sin^3\theta$

$=\cos^3\theta+3\sqrt{3}\cos^2\theta\sin\theta+9\cos\theta(1-\cos^2\theta)+3\sqrt{3}\sin\theta(1-\cos^2\theta)$

$=-8\cos^3\theta+9\cos\theta+3\sqrt{3}\sin\theta=-2(4\cos^3\theta-3\cos\theta)+3\cos\theta+3\sqrt{3}\sin\theta$

3 倍角の公式より，$t^3=-2\cos3\theta+3t$ となり，$\cos3\theta=\dfrac{-t^3+3t}{2}$ である。

(2)　$t^2=(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)^2=\cos^2\theta+2\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta+3\sin^2\theta$

$=\dfrac{1+\cos2\theta}{2}+\sqrt{3}\sin2\theta+3\cdot\dfrac{1-\cos2\theta}{2}=\sqrt{3}\sin2\theta-\cos2\theta+2$

これより，$\cos2\theta-\sqrt{3}\sin2\theta=-t^2+2$

すると，$y=-4\cos3\theta+\cos2\theta-\sqrt{3}\sin2\theta+2\cos\theta+2\sqrt{3}\sin\theta$

$=-4\cdot\dfrac{-t^3+3t}{2}-t^2+2+2t=2t^3-t^2-4t+2$

(3)　$t=2\sin(\theta+30^\circ)$ と合成すると，$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ から $30^\circ\leqq\theta+30^\circ\leqq210^\circ$ となり，$-1\leqq t\leqq2$ である。

(2)より，$y'=6t^2-2t-4$

$=2(3t+2)(t-1)$

t	-1	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$	2
y'		＋	0	－	0	＋	
y	3	↗	$\frac{98}{27}$	↘	-1	↗	6

右表より，$t=2$ のとき最大値 6 をとる。このとき $2\sin(\theta+30^\circ)=2$ より，$\theta+30^\circ=90^\circ$ すなわち $\theta=60^\circ$ である。

また，$t=1$ のとき最小値 -1 をとる。このとき $2\sin(\theta+30^\circ)=1$ より，$\theta+30^\circ=30^\circ,\ 150^\circ$ すなわち $\theta=0^\circ,\ 120^\circ$ である。

［解 説］

(1)は，3 倍角の公式が関係するようなので，とりあえず t の 3 乗を計算しました。すると，予測した通りでした。