

1

解答解説のページへ

実数 a, b, c, d に対し, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおく。

- (1) $A^2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ のとき, $\alpha\delta - \beta\gamma \geq 0$ を示せ。
- (2) A が $A^4 = E$ を満たすならば, $A^2 = E$ または $A^2 = -E$ となることを示せ。
- (3) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする。 A が $A^2 = -E$ および $BA = -AB$ を満たすとき, b, c, d を a の式で表せ。また, このとき $AB = A^m BA^n$ が成立するような整数の組 (m, n) で $1 \leq m \leq 3$, $1 \leq n \leq 3$ の範囲にあるものをすべて求めよ。

2

解答解説のページへ

2つの関数を

$$t = \cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta, \quad y = -4 \cos 3\theta + \cos 2\theta - \sqrt{3} \sin 2\theta + 2 \cos \theta + 2\sqrt{3} \sin \theta$$

とする。

- (1) $\cos 3\theta$ を t の関数で表せ。
- (2) y を t の関数で表せ。
- (3) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき, y の最大値, 最小値とそのときの θ の値を求めよ。

3

解答解説のページへ

関数 $f(x) = 4x - x^2$ に対し、数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = c, \quad a_{n+1} = \sqrt{f(a_n)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で与える。ただし、 c は $0 < c < 2$ を満たす定数である。

- (1) $a_n < 2, \quad a_n < a_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$ を示せ。
- (2) $2 - a_{n+1} < \frac{2-c}{2}(2 - a_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$ を示せ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

4

解答解説のページへ

xyz 空間内に 2 点 $P(u, u, 0)$, $Q(u, 0, \sqrt{1-u^2})$ を考える。 u が 0 から 1 まで動くとき、線分 PQ が通過してできる曲面を S とする。

- (1) 点 $(u, 0, 0)$ ($0 \leq u \leq 1$) と線分 PQ の距離を求めよ。
- (2) 曲面 S を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる立体の体積を求めよ。

5

解答解説のページへ

複素数平面上で、相異なる 3 点 1 , α , α^2 は実軸上に中心をもつ同一円周上にある。このような α の存在する範囲を複素数平面上に図示せよ。さらに、この円の半径を $|\alpha|$ を用いて表せ。

6

解答解説のページへ

対数は自然対数であり、 e はその底とする。関数 $f(x) = (x+1)\log\frac{x+1}{x}$ に対して、

次の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ は $x > 0$ で単調減少関数であることを示せ。
- (2) $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)$ および $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ を求めよ。
- (3) $f(x) = 2$ を満たす x が $\frac{1}{e^2} < x < 1$ の範囲に存在することを示せ。

1

問題のページへ

$$(1) \quad A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \text{より,}$$

$$\alpha\delta - \beta\gamma = (a^2 + bc)(bc + d^2) - (ac + cd)(ab + bd) = (ad - bc)^2 \geq 0$$

$$(2) \quad A^4 = (A^2)^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta\gamma & \alpha\beta + \beta\delta \\ \alpha\gamma + \gamma\delta & \beta\gamma + \delta^2 \end{pmatrix}, \quad A^4 = E \text{より,}$$

$$\alpha^2 + \beta\gamma = 1 \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad \beta(\alpha + \delta) = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\gamma(\alpha + \delta) = 0 \cdots \cdots \textcircled{3}, \quad \beta\gamma + \delta^2 = 1 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

(i) $\alpha + \delta = 0$ のとき ①から $\alpha(-\delta) + \beta\gamma = 1$, $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$, (1)より不適である。

(ii) $\alpha + \delta \neq 0$ のとき ②③から $\beta = \gamma = 0$, ①から $\alpha = \pm 1$, ④から $\delta = \pm 1$

$$\alpha + \delta \neq 0 \text{より, } (\alpha, \delta) = (1, 1), (-1, -1)$$

(i)(ii)より, $A^2 = E$ または $A^2 = -E$ となる。

$$(3) \quad A^2 = -E \text{より, } a^2 + bc = -1 \cdots \cdots \textcircled{5}, \quad b(a + d) = 0 \cdots \cdots \textcircled{6}$$

$$c(a + d) = 0 \cdots \cdots \textcircled{7}, \quad bc + d^2 = -1 \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$$BA = -AB \text{より, } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{となり,}$$

$$c = -b \cdots \cdots \textcircled{9}, \quad d = -a \cdots \cdots \textcircled{10}$$

まず, ⑩より⑥と⑦は満たされており, ⑧は⑤と一致する。⑨⑩を⑤に代入すると, $a^2 - b^2 = -1$, $b = \pm\sqrt{a^2 + 1}$, ⑨より $c = -b = \mp\sqrt{a^2 + 1}$ (複号同順) となる。

さて, $1 \leq m \leq 3$, $1 \leq n \leq 3$ を満たす整数 m, n に対して,

$$(i) \quad (m, n) = (1, 1) \text{ のとき } A^m B A^n = ABA = -AAB = B$$

$$(ii) \quad (m, n) = (1, 2) \text{ のとき } A^m B A^n = ABA^2 = -AB$$

$$(iii) \quad (m, n) = (1, 3) \text{ のとき } A^m B A^n = ABA^3 = -ABA = -B$$

$$(iv) \quad (m, n) = (2, 1) \text{ のとき } A^m B A^n = A^2 B A = -BA = AB$$

$$(v) \quad (m, n) = (2, 2) \text{ のとき } A^m B A^n = A^2 B A^2 = B$$

$$(vi) \quad (m, n) = (2, 3) \text{ のとき } A^m B A^n = A^2 B A^3 = -B(-A) = -AB$$

$$(vii) \quad (m, n) = (3, 1) \text{ のとき } A^m B A^n = A^3 B A = -ABA = -B$$

$$(viii) \quad (m, n) = (3, 2) \text{ のとき } A^m B A^n = A^3 B A^2 = -A(-B) = AB$$

$$(ix) \quad (m, n) = (3, 3) \text{ のとき } A^m B A^n = A^3 B A^3 = -AB(-A) = B$$

以上より, $(m, n) = (2, 1), (3, 2)$ のとき, $AB = A^m B A^n$ が成立する。

[解説]

何の工夫もせずに, 成分計算だけで解きました。(3)も, すべてを考えても 9 通りの場合分けにすぎませんので, 実戦的な解法で記述しています。

2

問題のページへ

$$\begin{aligned}
 (1) \quad t^3 &= (\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta)^3 = \cos^3\theta + 3\sqrt{3}\cos^2\theta\sin\theta + 9\cos\theta\sin^2\theta + 3\sqrt{3}\sin^3\theta \\
 &= \cos^3\theta + 3\sqrt{3}\cos^2\theta\sin\theta + 9\cos\theta(1-\cos^2\theta) + 3\sqrt{3}\sin\theta(1-\cos^2\theta) \\
 &= -8\cos^3\theta + 9\cos\theta + 3\sqrt{3}\sin\theta = -2(4\cos^3\theta - 3\cos\theta) + 3\cos\theta + 3\sqrt{3}\sin\theta
 \end{aligned}$$

3倍角の公式より, $t^3 = -2\cos 3\theta + 3t$ となり, $\cos 3\theta = \frac{-t^3 + 3t}{2}$ である。

$$\begin{aligned}
 (2) \quad t^2 &= (\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta)^2 = \cos^2\theta + 2\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta + 3\sin^2\theta \\
 &= \frac{1+\cos 2\theta}{2} + \sqrt{3}\sin 2\theta + 3 \cdot \frac{1-\cos 2\theta}{2} = \sqrt{3}\sin 2\theta - \cos 2\theta + 2
 \end{aligned}$$

これより, $\cos 2\theta - \sqrt{3}\sin 2\theta = -t^2 + 2$

$$\begin{aligned}
 \text{すると, } y &= -4\cos 3\theta + \cos 2\theta - \sqrt{3}\sin 2\theta + 2\cos\theta + 2\sqrt{3}\sin\theta \\
 &= -4 \cdot \frac{-t^3 + 3t}{2} - t^2 + 2 + 2t = 2t^3 - t^2 - 4t + 2
 \end{aligned}$$

(3) $t = 2\sin(\theta + 30^\circ)$ と合成すると, $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ から $30^\circ \leq \theta + 30^\circ \leq 210^\circ$ となり, $-1 \leq t \leq 2$ である。

(2)より, $y' = 6t^2 - 2t - 4$

$$= 2(3t+2)(t-1)$$

右表より, $t=2$ のとき最大値 6 をとる。このとき $2\sin(\theta + 30^\circ) = 2$ より,

$\theta + 30^\circ = 90^\circ$ すなわち $\theta = 60^\circ$ である。

また, $t=1$ のとき最小値 -1 をとる。このとき $2\sin(\theta + 30^\circ) = 1$ より, $\theta + 30^\circ = 30^\circ, 150^\circ$ すなわち $\theta = 0^\circ, 120^\circ$ である。

t	-1	...	$-\frac{2}{3}$...	1	...	2
y'		+	0	-	0	+	
y	3	\nearrow	$\frac{98}{27}$	\searrow	-1	\nearrow	6

[解説]

(1)は, 3倍角の公式が関係するようなので, とりあえず t の 3 乗を計算しました。すると, 予測した通りでした。

3

問題のページへ

(1) $0 < a_n < 2$ であることを数学的帰納法を用いて示す。

(i) $n=1$ のとき $a_1 = c$ ($0 < c < 2$) より成立する。

(ii) $n=k$ のとき $0 < a_k < 2$ が成立すると仮定する。

ここで, $f(a_k) = 4a_k - a_k^2 = -(a_k - 2)^2 + 4$ で, $0 < a_k < 2$ より, $0 < f(a_k) < 4$ すなわち $0 < \sqrt{f(a_k)} < 2$ となる。よって, $0 < a_{k+1} < 2$ が成立する。

(i)(ii)より, $0 < a_n < 2$ が成立する。

$$\text{また, } a_{n+1} - a_n = \sqrt{4a_n - a_n^2} - a_n = \frac{4a_n - a_n^2 - a_n^2}{\sqrt{4a_n - a_n^2} + a_n} = \frac{2a_n(2 - a_n)}{\sqrt{4a_n - a_n^2} + a_n} > 0$$

よって, $a_n < a_{n+1}$ が成立する。

$$(2) \text{ まず, } 2 - a_{n+1} = 2 - \sqrt{4a_n - a_n^2} = \frac{4 - (4a_n - a_n^2)}{2 + \sqrt{4a_n - a_n^2}} = \frac{2 - a_n}{2 + \sqrt{4a_n - a_n^2}}(2 - a_n)$$

ここで, $c = a_1 \leq a_n$ より $0 < 2 - a_n \leq 2 - c$, また $2 + \sqrt{4a_n - a_n^2} > 2$ なので,

$$0 < \frac{2 - a_n}{2 + \sqrt{4a_n - a_n^2}} < \frac{2 - c}{2}$$

よって, $2 - a_{n+1} < \frac{2 - c}{2}(2 - a_n)$ となる。

$$(3) (2) \text{ より, } 0 < 2 - a_n \leq (2 - a_1) \left(\frac{2 - c}{2} \right)^{n-1} \text{ (等号は } n=1 \text{ のとき成立)}$$

$0 < \frac{2 - c}{2} < 1$ より, $n \rightarrow \infty$ のとき $\left(\frac{2 - c}{2} \right)^{n-1} \rightarrow 0$ となるので, $2 - a_n \rightarrow 0$

よって, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$

[解説]

毎年, 出題を見かける有名問題です。誘導も詳しいので, 解の道筋は明快です。

4

問題のページへ

- (1) 平面 $x = u$ 上で考えて、点 $O'(u, 0, 0)$ と線分 PQ との距離を d とすると、

$$PQ \times d = O'P \times O'Q$$

$$PQ = \sqrt{u^2 + (1-u^2)} = 1 \text{ より, } d = u\sqrt{1-u^2}$$

- (2) 曲面 S を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる立体を、平面 $x = u$ で切断したときの切り口は、線分 PQ を x 軸のまわりに回転させて得られるドーナツ状の図形である。その面積を $S(u)$ とおく。

さて、 $u \leq \sqrt{1-u^2}$ とすると、 $0 \leq u \leq 1$ から $u^2 \leq \frac{1}{2}$ なので、 $0 \leq u \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ となる。

また、 $u \geq \sqrt{1-u^2}$ とすると、 $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq u \leq 1$ である。

- (i) $0 \leq u \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき

$$S(u) = \pi(\sqrt{1-u^2})^2 - \pi d^2 = \pi\{1-u^2 - u^2(1-u^2)\} = \pi(1-2u^2+u^4)$$

- (ii) $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq u \leq 1$ のとき

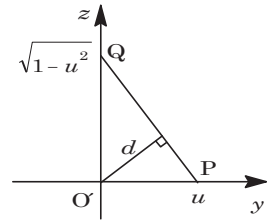
$$S(u) = \pi u^2 - \pi d^2 = \pi\{u^2 - u^2(1-u^2)\} = \pi u^4$$

- (i)(ii)より、求める立体の体積を V とすると、

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \pi(1-2u^2+u^4) du + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \pi u^4 du \\ &= \pi \left[u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \pi \left[\frac{1}{5}u^5 \right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{5} \right) \pi \end{aligned}$$

[解説]

頻出有名問題の 1 つです。ドーナツ状の切り口の外径が、 $O'P$ か $O'Q$ かで場合分けをします。



5

問題のページへ

まず, 3 点 $1, \alpha, \alpha^2$ が異なることより, $\alpha \neq 1, \alpha^2 \neq \alpha, \alpha^2 \neq 1$ なので, $\alpha \neq \pm 1, \alpha \neq 0$ である。このとき, k を実数として, 中心が点 k である円 C 上に 3 点 $1, \alpha, \alpha^2$ があるとすると, $|k-1|=|k-\alpha|=|k-\alpha^2|$ である。

$$|k-1|=|k-\alpha| \text{ より, } (k-1)^2 = (k-\alpha)(k-\bar{\alpha})$$

$$k^2 - 2k + 1 = k^2 - (\alpha + \bar{\alpha})k + \alpha\bar{\alpha}, (\alpha + \bar{\alpha} - 2)k = |\alpha|^2 - 1 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$|k-1|=|k-\alpha^2| \text{ より, } (k-1)^2 = (k-\alpha^2)(k-\bar{\alpha}^2)$$

$$k^2 - 2k + 1 = k^2 - (\alpha^2 + \bar{\alpha}^2)k + \alpha^2\bar{\alpha}^2, (\alpha^2 + \bar{\alpha}^2 - 2)k = |\alpha|^4 - 1 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

ここで, $\alpha + \bar{\alpha} - 2 = 0$ のときは, ①より $|\alpha|^2 - 1 = 0$ となる。すなわち, $\frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2} = 1$ かつ $|\alpha| = 1$ であるので, $\alpha = 1$ となる。

ところが, これは $\alpha \neq 1$ に反し, $\alpha + \bar{\alpha} - 2 \neq 0$ から $k = \frac{|\alpha|^2 - 1}{\alpha + \bar{\alpha} - 2}$ である。

$$\textcircled{2} \text{ に代入して, } (\alpha^2 + \bar{\alpha}^2 - 2)(|\alpha|^2 - 1) = (|\alpha|^4 - 1)(\alpha + \bar{\alpha} - 2)$$

$$(|\alpha|^2 - 1)\{(\alpha^2 + \bar{\alpha}^2 - 2) - (|\alpha|^2 + 1)(\alpha + \bar{\alpha} - 2)\} = 0$$

$$(|\alpha|^2 - 1)\{(\alpha + \bar{\alpha})^2 - 2|\alpha|^2 - 2 - (\alpha + \bar{\alpha} - 2)|\alpha|^2 - (\alpha + \bar{\alpha}) + 2\} = 0$$

$$(|\alpha|^2 - 1)(\alpha + \bar{\alpha})(\alpha + \bar{\alpha} - |\alpha|^2 - 1) = 0, (|\alpha|^2 - 1)(\alpha + \bar{\alpha})(\alpha - 1)(\bar{\alpha} - 1) = 0$$

$\alpha \neq 1$ より $(|\alpha|^2 - 1)(\alpha + \bar{\alpha}) = 0$, すなわち $|\alpha|^2 - 1 = 0$ または $\alpha + \bar{\alpha} = 0$ となる。

(i) $|\alpha|^2 - 1 = 0$ のとき

$|\alpha| = 1$ より, 点 α は原点中心で半径 1 の円周上に存在する。ただし, $\alpha \neq \pm 1$ である。このとき $k = 0$ より, 円 C の半径は $|k-1| = 1$ である。

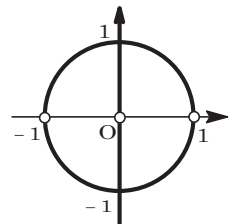
(ii) $\alpha + \bar{\alpha} = 0$ のとき

$\bar{\alpha} = -\alpha$ より, 点 α は虚軸上に存在する。ただし, $\alpha \neq 0$ である。このとき,

$k = \frac{|\alpha|^2 - 1}{-2}$ より, 円 C の半径は,

$$|k-1| = \left| \frac{|\alpha|^2 - 1}{-2} - 1 \right| = \left| \frac{|\alpha|^2 + 1}{-2} \right| = \frac{|\alpha|^2 + 1}{2}$$

(i)(ii)より, α の存在する範囲は右図の太線部となる。ただし, 原点および点 ± 1 は除く。



円 C の半径は, (i)(ii)の場合を合わせて, $\frac{|\alpha|^2 + 1}{2}$ である。

[解説]

複素数平面上の図形が題材ですが, ポイントは①②式をまとめる計算です。

6

問題のページへ

$$(1) \quad x > 0 \text{ のとき, } f(x) = (x+1) \log \frac{x+1}{x} = (x+1) \{ \log(x+1) - \log x \}$$

$$f'(x) = \log(x+1) - \log x + (x+1) \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} \right) = \log(x+1) - \log x - \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - x(x+1) + (x+1)}{x^2(x+1)} = \frac{1}{x^2(x+1)} > 0$$

これより, $f'(x)$ は単調増加関数であり,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\log \frac{x+1}{x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ \log \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x} \right\} = 0$$

よって, $x > 0$ のとき $f'(x) < 0$ となるので, $f(x)$ は単調減少関数である。

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} (x+1) \log \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} (x+1) \log \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \log \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} \log \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = \log e = 1$$

$$(3) \quad f\left(\frac{1}{e^2}\right) - 2 = \left(\frac{1}{e^2} + 1\right) \log(1 + e^2) - \log e^2 = \frac{1}{e^2} \{ (1 + e^2) \log(1 + e^2) - e^2 \log e^2 \}$$

ここで, $g(x) = x \log x$ ($x > 1$) とおくと, $g'(x) = \log x + 1 > 0$ から,

$$g(1 + e^2) > g(e^2)$$

$$\text{すると, } f\left(\frac{1}{e^2}\right) - 2 > 0 \text{ より, } f\left(\frac{1}{e^2}\right) > 2 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{また, } f(1) - 2 = 2 \log 2 - 2 = \log 4 - \log e^2 < 0 \text{ から, } f(1) < 2 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}\textcircled{2} \text{ より, } f\left(\frac{1}{e^2}\right) > 2 > f(1)$$

よって, (1) から, $\frac{1}{e^2} < x < 1$ の範囲に, $f(x) = 2$ を満たす x が存在する。

[解説]

微分の応用についての基本問題です。誘導が非常にていねいです。