1

解答解説のページへ

曲線$C : y = x^2 - 2$と直線$L : y = x$があり，曲線$D : y = -(x-a)^2 + b$が L と接している。C と L の 2 つの交点を結ぶ線分上に D と L の接点があるとき，以下の問いに答えよ。

(1) bをaで表し, aのとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 2 つの曲線CとDによって囲まれる図形の面積$S(a)$を求めよ。

(3) aが動くとき, (2)の面積$S(a)$の最大値と最小値を求めよ。

2

解答解説のページへ

四角形 OABC は辺 OA を下底, 辺 CB を上底とし, ∠AOC と ∠OAB が等しい等脚台形である。$a=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$, $c=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$, $m=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく。

(1) $m<\dfrac{a^2}{2}$ が成り立つことを示せ。

(2) 等脚台形 OABC の面積 S を a, c, m を用いて表せ。

(3) 対角線 OB と AC の交点を D とするとき, $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ。

3

解答解説のページへ

複素数 $z,\ w$ が条件 $\dfrac{1}{z-i}+\dfrac{1}{z+i}=\dfrac{1}{w}$ を満たしている。ただし，$z\neq\pm i$，$w\neq 0$ である。z の実部，虚部をそれぞれ $x,\ y$ とし，w の実部，虚部をそれぞれ $u,\ v$ とする。

(1)　$(z-w)^2$ を u と v で表せ。

(2)　$u=0$ ならば，$x=0$ であることを示せ。

(3)　$u>0,\ v>0$，かつ w^2 の実部が 1 となるような x を求め，u を用いて表せ。

4

解答解説のページへ

A, B, C の 3 人でじゃんけんをする。一度じゃんけんで負けたものは, 以後のじゃんけんから抜ける。残りが 1 人になるまでじゃんけんをくり返し, 最後に残った者を勝者とする。ただし, あいこの場合も 1 回のじゃんけんを行ったと数える。

(1) 1 回目のじゃんけんで勝者が決まる確率を求めよ。

(2) 2 回目のじゃんけんで勝者が決まる確率を求めよ。

(3) 3 回目のじゃんけんで勝者が決まる確率を求めよ。

(4) $n \geqq 4$ とする。n 回目のじゃんけんで勝者が決まる確率を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$C: y = x^2 - 2$ ……①と $L: y = x$ ……②の交点は,

$$x^2 - 2 = x,\ x^2 - x - 2 = 0$$

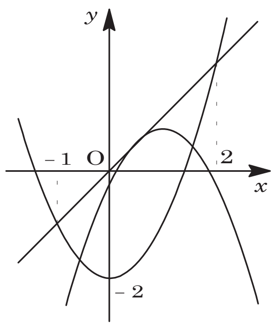
よって, $x = -1,\ 2$

②と $D: y = -(x-a)^2 + b$ ……③の共有点は,

$$x = -(x-a)^2 + b,\ x^2 + (1-2a)x + a^2 - b = 0$$

②と③が接することより,

$$D = (1-2a)^2 - 4(a^2 - b) = 0,\ b = a - \frac{1}{4} \text{ ………④}$$



このとき, 接点の x 座標は $x = -\dfrac{1-2a}{2}$ となり, これが

$-1 \leqq x \leqq 2$ にあることより,

$$-1 \leqq -\frac{1-2a}{2} \leqq 2,\ -2 \leqq 2a - 1 \leqq 4,\ -\frac{1}{2} \leqq a \leqq \frac{5}{2}$$

(2)　④を③に代入して, $y = -x^2 + 2ax - a^2 + a - \dfrac{1}{4}$ ………③′

③′と①との交点は, $x^2 - 2 = -x^2 + 2ax - a^2 + a - \dfrac{1}{4}$

$$2x^2 - 2ax + a^2 - a - \frac{7}{4} = 0,\ x = \frac{2a \pm \sqrt{-4a^2 + 8a + 14}}{4}$$

これを $x = \alpha,\ \beta\ (\alpha < \beta)$ とおくと, C と D で囲まれる図形の面積 $S(a)$ は,

$$S(a) = \int_\alpha^\beta -\left(2x^2 - 2ax + a^2 - a - \frac{7}{4}\right)dx = \int_\alpha^\beta -2(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$= -2\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\sqrt{-4a^2 + 8a + 14}\right)^3$$

$$= \frac{1}{24}\left(\sqrt{-4a^2 + 8a + 14}\right)^3$$

(3)　$f(a) = -4a^2 + 8a + 14$ とおくと, (2)より, $S(a) = \dfrac{1}{24}\left(\sqrt{f(a)}\right)^3$ となり,

$$f(a) = -4(a-1)^2 + 18$$

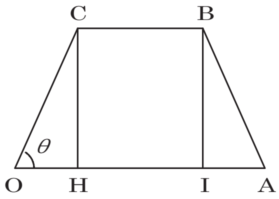
(1)から $-\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq \dfrac{5}{2}$ より, $f(a)$ は最大値 $f(1) = 18$, 最小値 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = f\left(\dfrac{5}{2}\right) = 9$ をとる。すると, $S(a)$ の最大値は $S(1) = \dfrac{1}{24}\left(\sqrt{18}\right)^3 = \dfrac{9}{4}\sqrt{2}$ となり, 最小値は $S\left(-\dfrac{1}{2}\right) = S\left(\dfrac{5}{2}\right) = \dfrac{1}{24}\left(\sqrt{9}\right)^3 = \dfrac{9}{8}$ となる。

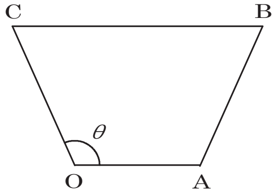
[解 説]

数Ⅱの微積分の超頻出基本問題です。

2

問題のページへ





(1)　$\angle\mathrm{AOC}=\theta$ とおくと，$m=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=ac\cos\theta$ となる。

頂点 C, B から OA に下ろした垂線の足を，それぞれ H, I とする。

(i)　$\mathrm{OA}>\mathrm{CB}\ (0°<\theta<90°)$ のとき

$\mathrm{OH}=\mathrm{AI}$ から $\mathrm{OH}+\mathrm{AI}<a$ となり，$\mathrm{OH}<\dfrac{a}{2}$

よって，$m=a\cdot c\cos\theta=a\mathrm{OH}<\dfrac{a^2}{2}$

(ii)　$\mathrm{OA}\leqq\mathrm{CB}\ (90°\leqq\theta<180°)$ のとき

$\cos\theta\leqq0$ より，$m<\dfrac{a^2}{2}$ は成立する。

(2)　(i) $\mathrm{OA}>\mathrm{CB}\ (0°<\theta<90°)$ のとき

(1)より，$\mathrm{CB}=a-2c\cos\theta=a-\dfrac{2m}{a}$

$$\mathrm{CH}=c\sin\theta=c\sqrt{1-\cos^2\theta}=c\sqrt{1-\frac{m^2}{a^2c^2}}=\frac{\sqrt{a^2c^2-m^2}}{a}$$

よって，$S=\dfrac{1}{2}\left(a-\dfrac{2m}{a}+a\right)\cdot\dfrac{\sqrt{a^2c^2-m^2}}{a}=\dfrac{(a^2-m)\sqrt{a^2c^2-m^2}}{a^2}$

(ii)　$\mathrm{OA}\leqq\mathrm{CB}\ (90°\leqq\theta<180°)$ のとき

$$\mathrm{CB}=a+2c\cos(180°-\theta)=a-2c\cos\theta,\ \ \mathrm{CH}=c\sin(180°-\theta)=c\sin\theta$$

(i)と同様に，$S=\dfrac{(a^2-m)\sqrt{a^2c^2-m^2}}{a^2}$

(i)(ii)より，$S=\dfrac{(a^2-m)\sqrt{a^2c^2-m^2}}{a^2}$

(3)　CB // OA より，$\mathrm{CD}:\mathrm{DA}=\mathrm{CB}:\mathrm{OA}=\left(a-\dfrac{2m}{a}\right):a=(a^2-2m):a^2$ なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{(a^2-2m)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+a^2\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2a^2-2m}$$

［解 説］

台形の上底と下底の長さの大小関係で，場合分けをする必要があります。この点に気付くことがポイントの１つです。

3

問題のページへ

(1) 条件より，$\dfrac{1}{w}=\dfrac{1}{z-i}+\dfrac{1}{z+i}=\dfrac{2z}{z^2+1}$

$z=0$ では成立しないので $z\neq0$ となり，$w=\dfrac{z^2+1}{2z}=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$………①

$$(z-w)^2=\left(\frac{1}{2}z-\frac{1}{2z}\right)^2=\frac{1}{4}\left(z-\frac{1}{z}\right)^2=\frac{1}{4}\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-1=w^2-1$$

よって，$(z-w)^2=(u+vi)^2-1=u^2-v^2-1+2uvi$………②

(2) $u=0$ のとき，①より $z+\dfrac{1}{z}$ は純虚数なので, k を実数として $z+\dfrac{1}{z}=ki$ となる。

$$z^2-kiz+1=0,\quad z=\frac{ki\pm\sqrt{-k^2-4}}{2}=\frac{k\pm\sqrt{k^2+4}}{2}i$$

よって, z は純虚数より，$x=0$ である。

(3) $w^2=u^2-v^2+2uvi$ の実部が 1 より，$u^2-v^2=1$………③

このとき，②より，$(z-w)^2=2uvi$，$\{(x-u)+(y-v)i\}^2=2uvi$

$$(x-u)^2-(y-v)^2+2(x-u)(y-v)i=2uvi$$

x, y, u, v は実数なので,

$$(x-u)^2-(y-v)^2=0\ \cdots\cdots\cdots④,\quad (x-u)(y-v)=uv\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

④より $y-v=\pm(x-u)$ となり，⑤に代入すると，$\pm(x-u)^2=uv$

$u>0, v>0$ より，$(x-u)^2=uv$，$x=u\pm\sqrt{uv}$

③より $v=\sqrt{u^2-1}$ となるので，$x=u\pm\sqrt{u\sqrt{u^2-1}}$

［解 説］

文字と関係式がたくさん現れ，方針に迷いが生じます。この交通整理の能力が問われます。

$\boxed{4}$ 問題のページへ

(1) 3 人でじゃんけんをすると，手の出方の総数は，$3^3=27$ 通りである。

勝者が決まるのは，勝者の決め方が 3 通りで，勝つ手の出方が 3 通りなので，$3\times3=9$ 通りとなり，その確率は $\dfrac{9}{27}=\dfrac{1}{3}$ である。

(2) 3 人でじゃんけんをするとき，(1)より 1 人勝ちの確率は $\dfrac{1}{3}$，同様に，1 人負けの確率も $\dfrac{1}{3}$，あいこの確率は $1-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$ である。また，2 人でじゃんけんをするとき，1 人勝ちの確率は $\dfrac{2\times3}{3^2}=\dfrac{2}{3}$，あいこの確率は $1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$ である。

さて，3 人でじゃんけんをして，2 回目に勝者が決まるのは，じゃんけんをする人数で場合分けをすると，次の 2 つの場合がある。

(i) 3 人 $\xrightarrow{1回}$ 3 人 $\xrightarrow{2回}$ 1 人のとき　この確率は，$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}$

(ii) 3 人 $\xrightarrow{1回}$ 2 人 $\xrightarrow{2回}$ 1 人のとき　この確率は，$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{9}$

(i)(ii)より, 2 回目に勝者が決まる確率は，$\dfrac{1}{9}+\dfrac{2}{9}=\dfrac{1}{3}$

(3) (i)3 人 $\xrightarrow{1回}$ 3 人 $\xrightarrow{2回}$ 3 人 $\xrightarrow{3回}$ 1 人のとき　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{27}$

(ii) 3 人 $\xrightarrow{1回}$ 3 人 $\xrightarrow{2回}$ 2 人 $\xrightarrow{3回}$ 1 人のとき　$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{27}$

(iii) 3 人 $\xrightarrow{1回}$ 2 人 $\xrightarrow{2回}$ 2 人 $\xrightarrow{3回}$ 1 人のとき　$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{27}$

(i)(ii)(iii)より, 3 回目に勝者が決まる確率は，$\dfrac{1}{27}+\dfrac{2}{27}+\dfrac{2}{27}=\dfrac{5}{27}$

(4) (i) $n-1$ 回目まで 3 人で続けるとき

3 人 $\xrightarrow{1回}$ 3 人 $\xrightarrow{2回}\cdots\xrightarrow{n-1回}$ 3 人 $\xrightarrow{n回}$ 1 人とじゃんけんをする人数が変化するので，その確率は，$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\times\dfrac{1}{3}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ である。

(ii) k 回目 $(1\leqq k\leqq n-1)$ に 1 人負けた後, 2 人で続けるとき

3 人 $\xrightarrow{1回}\cdots\xrightarrow{k-1回}$ 3 人 $\xrightarrow{k回}$ 2 人 $\xrightarrow{k+1回}\cdots\xrightarrow{n-1回}$ 2 人 $\xrightarrow{n回}$ 1 人とじゃんけんをする人数が変化するので，その確率は，

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k-1}\times\frac{2}{3}=2\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

(i)(ii)より, n 回目のじゃんけんで勝者が決まる確率は，

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n+\sum_{k=1}^{n-1}2\left(\frac{1}{3}\right)^n=\left(\frac{1}{3}\right)^n+2(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^n=(2n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

［解 説］

文系問題ということもあり, (4)に至るたいへん詳しい誘導がつけられています。