1

解答解説のページへ

$0<t<\frac{1}{2}$ とし，平面上のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ と単位ベクトル $\vec{e}$ が

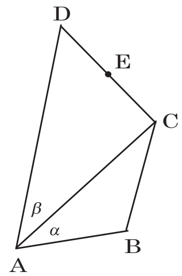
(i)　$(1-t)\vec{a}+t\vec{b}=\vec{e}$　　(ii)　$(1-t)(\vec{a}+\vec{e})=t(\vec{b}+\vec{e})$

を満たすとする。さらに平面上のベクトル $\vec{x}$ があって，$\vec{x}-\vec{a}$ と $\vec{x}-\vec{b}$ が垂直で長さの比が $t:1-t$ となるとする。このとき，内積 $\vec{x}\cdot\vec{e}$ を t で表せ。

2

解答解説のページへ

すべての内角が180°より小さい四角形 ABCD がある。辺の長さが $AB = BC = r$，$AD = 2r$ とする。さらに，辺 CD 上に点 E があり，3 つの三角形△ABC，△ACE，△ADEの面積はすべて等しいとする。$\alpha = \angle BAC$，$\beta = \angle CAD$ とおく。



(1)　$\alpha = \beta$ を示せ。

(2)　$\cos\angle DAB = \dfrac{3}{5}$ であるとするとき，$\sin\angle CAE$ の値を求めよ。

3

解答解説のページへ

1 から 6 の番号のつけられた 6 個の箱に，それぞれ 3 枚ずつの皿が重ねて置かれている。白いサイコロと黒いサイコロそれぞれ 1 個を同時に振って，出た目に応じて次の規則で皿を移動させるものとする。2 つのサイコロに同じ目が出たときは皿は移動させない。2 つのサイコロに異なる目が出たときは，黒いサイコロの目の数と同じ番号の箱から皿 1 枚を白いサイコロの目の数と同じ番号の箱に移す。

(1) サイコロを 3 回振るとき，皿が 4 枚の箱と 2 枚の箱がそれぞれ 3 個ずつとなる確率を求めよ。

(2) サイコロを 3 回振るとき，皿が 3 枚の箱が 2 個，5 枚の箱，4 枚の箱，2 枚の箱，1 枚の箱がそれぞれ 1 個ずつとなる確率を求めよ。

4

解答解説のページへ

2 つの曲線$C: y=-x^2$と$D: y=(x-a)^2+b$が 1 点で接している。曲線 D と曲線$E: y=\frac{1}{2}(x-1)^2+1$によって囲まれる部分の面積$S$が最小となるように実数$a$, bを定め，そのときのSを求めよ。

1

問題のページへ

まず，条件(i)より，$(1-t)\vec{a}+t\vec{b}=\vec{e}$ ………①

また，条件(ii)より，$(1-t)(\vec{a}+\vec{e})=t(\vec{b}+\vec{e})$，$(1-t)\vec{a}-t\vec{b}=(2t-1)\vec{e}$ ………②

①②より，$2(1-t)\vec{a}=2t\vec{e}$，$2t\vec{b}=2(1-t)\vec{e}$ となり，

$$\vec{a}=\frac{t}{1-t}\vec{e}\ \text{………③},\quad \vec{b}=\frac{1-t}{t}\vec{e}\ \text{………④}$$

すると，$\vec{x}-\vec{a}=\vec{x}-\dfrac{t}{1-t}\vec{e}=\dfrac{(1-t)\vec{x}-t\vec{e}}{1-t}$ ………⑤

$$\vec{x}-\vec{b}=\vec{x}-\frac{1-t}{t}\vec{e}=\frac{t\vec{x}-(1-t)\vec{e}}{t}\ \text{………⑥}$$

さて，条件$(\vec{x}-\vec{a})\cdot(\vec{x}-\vec{b})=0$ に，⑤⑥を適用すると，

$$\{(1-t)\vec{x}-t\vec{e}\}\cdot\{t\vec{x}-(1-t)\vec{e}\}=0$$

$$t(1-t)|\vec{x}|^2-(1-2t+t^2+t^2)\vec{x}\cdot\vec{e}+t(1-t)|\vec{e}|^2=0$$

$|\vec{e}|=1$ より，$t(1-t)|\vec{x}|^2-(1-2t+2t^2)\vec{x}\cdot\vec{e}+t(1-t)=0$ ………⑦

また，条件$|\vec{x}-\vec{a}|:|\vec{x}-\vec{b}|=t:1-t$ に，⑤⑥を適用すると，

$$(1-t)\left|\frac{(1-t)\vec{x}-t\vec{e}}{1-t}\right|=t\left|\frac{t\vec{x}-(1-t)\vec{e}}{t}\right|,\quad |(1-t)\vec{x}-t\vec{e}|=|t\vec{x}-(1-t)\vec{e}|$$

$$(1-t)^2|\vec{x}|^2-2t(1-t)\vec{x}\cdot\vec{e}+t^2|\vec{e}|^2=t^2|\vec{x}|^2-2t(1-t)\vec{x}\cdot\vec{e}+(1-t)^2|\vec{e}|^2$$

$|\vec{e}|=1$ より，$(1-2t)|\vec{x}|^2=1-2t$ となり，$0<t<\dfrac{1}{2}$ から $|\vec{x}|^2=1$ ………⑧

⑦⑧より，$t(1-t)-(1-2t+2t^2)\vec{x}\cdot\vec{e}+t(1-t)=0$ となるので，

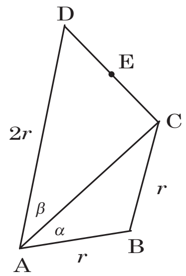
$$\vec{x}\cdot\vec{e}=\frac{2t(1-t)}{1-2t+2t^2}$$

［解 説］

文字がたくさん出てくるので，方針を明確にし，交通整理をしながら計算を進めます。ここでは，まず $\vec{a}$，$\vec{b}$ を消去するために，③と④を導きました。

2

問題のページへ



(1) $\triangle$ABC は二等辺三角形なので，$AC = 2AB\cos\alpha = 2r\cos\alpha$

そこで，$\triangle ABC = \dfrac{1}{2}r\cdot 2r\cos\alpha\cdot\sin\alpha = r^2\cos\alpha\sin\alpha$

$$\triangle ADC = \frac{1}{2}\cdot 2r\cdot 2r\cos\alpha\cdot\sin\beta = 2r^2\cos\alpha\sin\beta$$

条件より，$\triangle ADC = 2\triangle ABC$ なので，

$$\sin\alpha = \sin\beta$$

よって，$\alpha = \beta$ または $\alpha = 180° - \beta$

すると，条件より $\alpha + \beta < 180°$ なので，$\alpha = \beta$ である。

(2) $\alpha = \beta$ より，$AC = 2r\cos\beta$ となるので，$\angle ACD = 90°$ であり，

$$CD = 2r\sin\beta = 2r\sin\alpha$$

さて，$\triangle ACE = \triangle ADE$ から，点 E は辺 CD の中点となり，

$$CE = \frac{1}{2}CD = r\sin\alpha$$

ここで，$\angle CAE = \theta$ とおくと，

$$\tan\theta = \frac{CE}{AC} = \frac{r\sin\alpha}{2r\cos\alpha} = \frac{1}{2}\tan\alpha \cdots\cdots\cdots①$$

条件より，$\cos 2\alpha = \dfrac{3}{5}$ なので，$2\alpha < 90°$ から $\tan 2\alpha = \dfrac{4}{3}$ となり，

$$\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{4}{3},\ 2\tan^2\alpha + 3\tan\alpha - 2 = 0,\ (2\tan\alpha - 1)(\tan\alpha + 2) = 0$$

$\alpha < 90°$ から $\tan\alpha > 0$ なので，$\tan\alpha = \dfrac{1}{2} \cdots\cdots\cdots②$

①②より，$\tan\theta = \dfrac{1}{4}$ となり，$\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{4^2+1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{17}}$ である。

［解 説］

問題の図からも想像できますが，$\triangle$ACD は直角三角形です。この発見がポイントになります。

3

問題のページへ

(1)　皿が 4 枚の箱と 2 枚の箱がそれぞれ 3 個ずつとなるのは, 1 回目に異なる目, 2 回目に 1 回目に出た以外の異なる目が出て, さらに 3 回目に 1 回目, 2 回目に出た以外の異なる目が出ることより, その確率は,

$$\frac{{}_6\mathrm{P}_2}{6^2}\times\frac{{}_4\mathrm{P}_2}{6^2}\times\frac{{}_2\mathrm{P}_2}{6^2}=\frac{5}{324}$$

(2)　まず, 皿が 1 番の箱に 5 枚, 2 番の箱に 4 枚, 3 番の箱に 2 枚, 4 番の箱に 1 枚, 5 番と 6 番の箱に 3 枚ずつとなるのは, 次の 2 つの場合がある。

(i)　サイコロの目が(白, 黒) = (1, 3), (1, 4), (2, 4) と出るとき

出る順序は $3!=6$ 通りより, この確率は,

$$\frac{1}{6^2}\times\frac{1}{6^2}\times\frac{1}{6^2}\times 6=\frac{6}{6^6}$$

(ii)　サイコロの目が(白, 黒) = (1, 4), (1, 4), (2, 3) と出るとき

出る順序は 3 通りより, この確率は,

$$\frac{1}{6^2}\times\frac{1}{6^2}\times\frac{1}{6^2}\times 3=\frac{3}{6^6}$$

すると, 皿が 3 枚の箱が 2 個, 5 枚の箱, 4 枚の箱, 2 枚の箱, 1 枚の箱がそれぞれ 1 個ずつとなる確率は, 箱の番号と皿の枚数との対応を考えると,

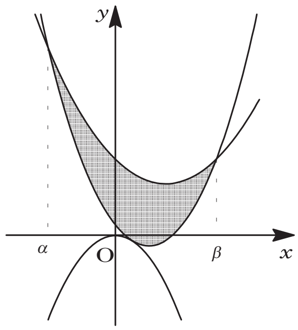
$$\left(\frac{6}{6^6}+\frac{3}{6^6}\right)\times{}_6\mathrm{P}_4=\frac{1}{2^2 6^4}\times 6\times 5\times 4\times 3=\frac{5}{72}$$

［解 説］

おもしろい確率の問題です。(2)では, イメージをはっきりさせるために, 具体例から考えました。どんな解法をとるにせよ, 注意深く, 疑い深く, 論を進める必要があります。

4

問題のページへ



まず，$C: y=-x^2$ ……①と $D: y=(x-a)^2+b$ ……②が接しているので，

$$-x^2=(x-a)^2+b,\ 2x^2-2ax+a^2+b=0$$

$$D/4=a^2-2(a^2+b)=0$$

よって，$b=-\dfrac{1}{2}a^2$ ……③となり，②に代入すると，

$$y=(x-a)^2-\frac{1}{2}a^2=x^2-2ax+\frac{1}{2}a^2 \text{ ………②}'$$

ここで，②′と $E: y=\dfrac{1}{2}(x-1)^2+1$ ……④の交点は，

$$x^2-2ax+\frac{1}{2}a^2=\frac{1}{2}(x-1)^2+1,\ \frac{1}{2}x^2-(2a-1)x+\frac{1}{2}(a^2-3)=0 \text{ ………⑤}$$

すると，$D=(2a-1)^2-(a^2-3)=3a^2-4a+4=3\left(a-\dfrac{2}{3}\right)^2+\dfrac{8}{3}>0$ ……⑥となることより，⑤はつねに異なる実数解をもち，

$$x=2a-1\pm\sqrt{3a^2-4a+4}$$

この値を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とすると，②′と④によって囲まれる部分の面積 S は，

$$S=\int_\alpha^\beta -\frac{1}{2}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{1}{12}\left(2\sqrt{3a^2-4a+4}\right)^3=\frac{2}{3}\left(\sqrt{3a^2-4a+4}\right)^3$$

よって，S が最小となるのは，⑥より $a=\dfrac{2}{3}$，③より $b=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{9}=-\dfrac{2}{9}$ のときであり，その最小値は，$S=\dfrac{2}{3}\left(\sqrt{\dfrac{8}{3}}\right)^3=\dfrac{32}{27}\sqrt{6}$ である。

［解 説］

いわゆる $\dfrac{1}{6}$ 公式を利用する微積分の基本問題です。完答することが望まれます。