

1

解答解説のページへ

$0 < t < \frac{1}{2}$ とし、平面上のベクトル \vec{a} , \vec{b} と単位ベクトル \vec{e} が

$$(i) \quad (1-t)\vec{a} + t\vec{b} = \vec{e} \quad (ii) \quad (1-t)(\vec{a} + \vec{e}) = t(\vec{b} + \vec{e})$$

を満たすとする。さらに平面上のベクトル \vec{x} があって、 $\vec{x} - \vec{a}$ と $\vec{x} - \vec{b}$ が垂直で長さの比が $t : 1-t$ となるとする。このとき、内積 $\vec{x} \cdot \vec{e}$ を t で表せ。

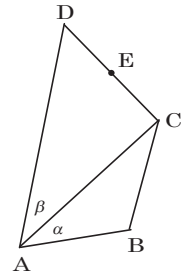
2

解答解説のページへ

すべての内角が 180° より小さい四角形 $ABCD$ がある。辺の長さが $AB = BC = r$, $AD = 2r$ とする。さらに、辺 CD 上に点 E があり、3 つの三角形 $\triangle ABC$, $\triangle ACE$, $\triangle ADE$ の面積はすべて等しいとする。 $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle CAD$ とおく。

(1) $\alpha = \beta$ を示せ。

(2) $\cos \angle DAB = \frac{3}{5}$ であるとするとき、 $\sin \angle CAE$ の値を求めよ。



3

解答解説のページへ

1 から n までの数字を 1 つずつ書いた n 枚のカードが箱に入っている。この箱から無作為にカードを 1 枚取り出して数字を記録し、箱に戻すという操作を繰り返す。ただし、 k 回目の操作で直前のカードと同じ数字か直前のカードよりも小さい数字のカードを取り出した場合に、 k を得点として終了する。

- (1) $2 \leq k \leq n+1$ を満たす自然数 k について、得点が k となる確率を求めよ。
- (2) 得点の期待値を n で表した式を $f(n)$ とするとき、 $f(n)$ および極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$ を求めよ。

4

解答解説のページへ

a を負の実数とし、放物線 $C_1 : y = ax^2 + bx + c$ を考える。 C_1 が曲線

$$C_2 : y = \begin{cases} x^2 - x + \frac{3}{4} & (x > 0 \text{ のとき}) \\ x^2 + 2x + \frac{3}{4} & (x \leq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と 2 点で接するとき、 C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を a で表せ。

5

解答解説のページへ

a, b を $a^2 \neq b^2$ を満たす 0 でない実数とし, A_n を次の関係式で定まる 2 次の正方行列とする。

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & a^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{n+1} \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

- (1) 行列 $C = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ で, $C \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ を満たすものを求めよ。
- (2) A_n を a, b, n で表せ。
- (3) $n \rightarrow \infty$ のとき A_n のすべての成分が収束するための条件を求めよ。

6

解答解説のページへ

a を $0 < a < 1$ を満たす定数とし, $f(x) = \frac{\cos 2x - 2}{a \cos x + 1}$ とする。

- (1) $f(x)$ が $0 \leq x \leq \pi$ で減少関数となる a の範囲を求めよ。
- (2) $f(x)$ の $0 \leq x \leq \pi$ における最大値は $f(0)$ であることを示せ。

1

問題のページへ

まず, 条件(i)より, $(1-t)\vec{a} + t\vec{b} = \vec{e}$ ……①

また, 条件(ii)より, $(1-t)(\vec{a} + \vec{e}) = t(\vec{b} + \vec{e})$, $(1-t)\vec{a} - t\vec{b} = (2t-1)\vec{e}$ ……②

①②より, $2(1-t)\vec{a} = 2t\vec{e}$, $2t\vec{b} = 2(1-t)\vec{e}$ となり,

$$\vec{a} = \frac{t}{1-t}\vec{e} \text{ ……③}, \quad \vec{b} = \frac{1-t}{t}\vec{e} \text{ ……④}$$

すると, $\vec{x} - \vec{a} = \vec{x} - \frac{t}{1-t}\vec{e} = \frac{(1-t)\vec{x} - t\vec{e}}{1-t}$ ……⑤

$$\vec{x} - \vec{b} = \vec{x} - \frac{1-t}{t}\vec{e} = \frac{t\vec{x} - (1-t)\vec{e}}{t} \text{ ……⑥}$$

さて, 条件 $(\vec{x} - \vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{b}) = 0$ に, ⑤⑥を適用すると,

$$\{(1-t)\vec{x} - t\vec{e}\} \cdot \{t\vec{x} - (1-t)\vec{e}\} = 0$$

$$t(1-t)|\vec{x}|^2 - (1-2t+t^2+t^2)\vec{x} \cdot \vec{e} + t(1-t)|\vec{e}|^2 = 0$$

$|\vec{e}| = 1$ より, $t(1-t)|\vec{x}|^2 - (1-2t+2t^2)\vec{x} \cdot \vec{e} + t(1-t) = 0$ ……⑦

また, 条件 $|\vec{x} - \vec{a}| : |\vec{x} - \vec{b}| = t : 1-t$ に, ⑤⑥を適用すると,

$$(1-t) \left| \frac{(1-t)\vec{x} - t\vec{e}}{1-t} \right| = t \left| \frac{t\vec{x} - (1-t)\vec{e}}{t} \right|, \quad |(1-t)\vec{x} - t\vec{e}| = |t\vec{x} - (1-t)\vec{e}|$$

$$(1-t)^2 |\vec{x}|^2 - 2t(1-t)\vec{x} \cdot \vec{e} + t^2 |\vec{e}|^2 = t^2 |\vec{x}|^2 - 2t(1-t)\vec{x} \cdot \vec{e} + (1-t)^2 |\vec{e}|^2$$

$|\vec{e}| = 1$ より, $(1-2t)|\vec{x}|^2 = 1-2t$ となり, $0 < t < \frac{1}{2}$ から $|\vec{x}|^2 = 1$ ……⑧

⑦⑧より, $t(1-t) - (1-2t+2t^2)\vec{x} \cdot \vec{e} + t(1-t) = 0$ となるので,

$$\vec{x} \cdot \vec{e} = \frac{2t(1-t)}{1-2t+2t^2}$$

[解説]

文字がたくさん出てくるので, 方針を明確にし, 交通整理をしながら計算を進めます。ここでは, まず \vec{a} , \vec{b} を消去するために, ③と④を導きました。

2

問題のページへ

- (1)
- $\triangle ABC$
- は二等辺三角形なので,
- $AC = 2AB\cos\alpha = 2r\cos\alpha$

$$\text{そこで, } \triangle ABC = \frac{1}{2}r \cdot 2r\cos\alpha \cdot \sin\alpha = r^2\cos\alpha\sin\alpha$$

$$\triangle ADC = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot 2r\cos\alpha \cdot \sin\beta = 2r^2\cos\alpha\sin\beta$$

条件より, $\triangle ADC = 2\triangle ABC$ なので,

$$\sin\alpha = \sin\beta$$

よって, $\alpha = \beta$ または $\alpha = 180^\circ - \beta$ すると, 条件より $\alpha + \beta < 180^\circ$ なので, $\alpha = \beta$ である。

- (2)
- $\alpha = \beta$
- より,
- $AC = 2r\cos\alpha$
- となるので,
- $\angle ACD = 90^\circ$
- であり,

$$CD = 2r\sin\alpha = 2r\sin\alpha$$

さて, $\triangle ACE = \triangle ADE$ から, 点 E は辺 CD の中点となり,

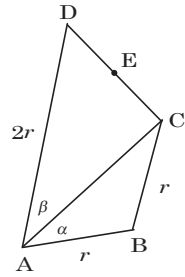
$$CE = \frac{1}{2}CD = r\sin\alpha$$

ここで, $\angle CAE = \theta$ とおくと,

$$\tan\theta = \frac{CE}{AC} = \frac{r\sin\alpha}{2r\cos\alpha} = \frac{1}{2}\tan\alpha \cdots \cdots \textcircled{1}$$

条件より, $\cos 2\alpha = \frac{3}{5}$ なので, $2\alpha < 90^\circ$ から $\tan 2\alpha = \frac{4}{3}$ となり,

$$\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{4}{3}, \quad 2\tan^2\alpha + 3\tan\alpha - 2 = 0, \quad (2\tan\alpha - 1)(\tan\alpha + 2) = 0$$

 $\alpha < 90^\circ$ から $\tan\alpha > 0$ なので, $\tan\alpha = \frac{1}{2} \cdots \cdots \textcircled{2}$ ①②より, $\tan\theta = \frac{1}{4}$ となり, $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{4^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$ である。

[解説]

問題の図からも想像できますが, $\triangle ACD$ は直角三角形です。この発見がポイントになります。

3

問題のページへ

(1) i 回目に取り出したカードの数字を x_i とすると、得点が k となるのは、

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-2} < x_{k-1} \geq x_k \cdots \cdots \textcircled{1}$$

ここで、 $x_{k-1} = l$ ($k-1 \leq l \leq n$) とおくと、 $x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-2} < l$ を満たす $(x_1, x_2, \dots, x_{k-2})$ の組は ${}_{l-1}C_{k-2}$ 個あり、 $l \geq x_k$ となる x_k は l 個ある。これより、 $\textcircled{1}$ となる確率 p_k は、

$$\begin{aligned} p_k &= \sum_{l=k-1}^n \frac{{}_{l-1}C_{k-2} \times 1 \times l}{n^k} = \frac{1}{n^k} \sum_{l=k-1}^n \frac{(l-1)! \times l}{(k-2)!(l-k+1)!} \\ &= \frac{k-1}{n^k} \sum_{l=k-1}^n \frac{l!}{(k-1)!(l-k+1)!} = \frac{k-1}{n^k} \sum_{l=k-1}^n {}_lC_{k-1} \end{aligned}$$

さて、一般的に、 ${}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r$ より、 ${}_{n-1}C_{r-1} = {}_nC_r - {}_{n-1}C_r$ が成り立つので、 $n \geq k$ のとき、

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{k-1}{n^k} \left\{ {}_{k-1}C_{k-1} + \sum_{l=k}^n ({}_{l+1}C_k - {}_lC_k) \right\} \\ &= \frac{k-1}{n^k} \left\{ 1 + ({}_{k+1}C_k - {}_kC_k) + ({}_{k+2}C_k - {}_{k+1}C_k) + \cdots + ({}_{n+1}C_k - {}_nC_k) \right\} \\ &= \frac{k-1}{n^k} {}_{n+1}C_k \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$n = k-1$ のとき、 $p_k = \frac{k-1}{n^k} {}_{k-1}C_{k-1} = \frac{k-1}{n^k}$ となり、 $\textcircled{2}$ は $n = k-1$ のときも成立する。よって、 $2 \leq k \leq n+1$ のとき、 $p_k = \frac{k-1}{n^k} {}_{n+1}C_k$ である。

(2) 得点 k の期待値が $f(n)$ より、

$$\begin{aligned} f(n) &= \sum_{k=2}^{n+1} k p_k = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{k(k-1)}{n^k} {}_{n+1}C_k = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{k(k-1)}{n^k} \cdot \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \\ &= \sum_{k=2}^{n+1} \frac{n(n+1)}{n^k} \cdot \frac{(n-1)!}{(k-2)!(n+1-k)!} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{n+1}{n^{k-1}} {}_{n-1}C_{k-2} \\ &= \frac{n+1}{n} \sum_{k=2}^{n+1} {}_{n-1}C_{k-2} \left(\frac{1}{n}\right)^{k-2} = \frac{n+1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \end{aligned}$$

$$\text{よって、} \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

[解説]

いろいろな解法が考えられますが、組合せに関する公式 ${}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r$ を利用する方法を採りました。なお、(2)の結論は想定外でした。

4

問題のページへ

曲線 $C_1 : y = ax^2 + bx + c \cdots \cdots \textcircled{1}$ に対して,

$$C_2 : y = x^2 - x + \frac{3}{4} \quad (x > 0) \cdots \cdots \textcircled{2}, \quad y = x^2 + 2x + \frac{3}{4} \quad (x \leq 0) \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$x > 0$ において, $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ が接することより,

$$ax^2 + bx + c = x^2 - x + \frac{3}{4}, \quad (1-a)x^2 - (1+b)x + \frac{3}{4} - c = 0 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$D = (1+b)^2 - (1-a)(3-4c) = 0 \cdots \cdots \textcircled{5}$$

$x \leq 0$ において, $\textcircled{1}$ と $\textcircled{3}$ が接することより,

$$ax^2 + bx + c = x^2 + 2x + \frac{3}{4}, \quad (1-a)x^2 + (2-b)x + \frac{3}{4} - c = 0 \cdots \cdots \textcircled{6}$$

$$D = (2-b)^2 - (1-a)(3-4c) = 0 \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$\textcircled{5}$ $\textcircled{7}$ より, $(1+b)^2 - (2-b)^2 = 0$, $2b-1=0$ から, $b = \frac{1}{2}$

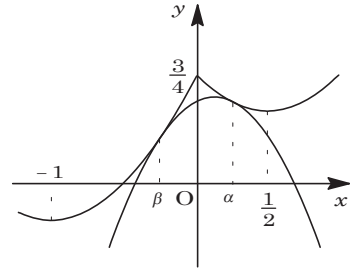
さて, $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ の接点は, $\textcircled{4}$ から,

$$x = \frac{1+b}{2(1-a)} = \frac{3}{4(1-a)}$$

また, $\textcircled{1}$ と $\textcircled{3}$ の接点は, $\textcircled{6}$ から,

$$x = \frac{-(2-b)}{2(1-a)} = -\frac{3}{4(1-a)}$$

ここで, $\alpha = \frac{3}{4(1-a)}$, $\beta = -\frac{3}{4(1-a)}$ とおくと, C_1



と C_2 で囲まれた図形の面積 S は,

$$\begin{aligned} S &= \int_{\beta}^0 (1-a)(x-\beta)^2 dx + \int_0^{\alpha} (1-a)(x-\alpha)^2 dx \\ &= \frac{1-a}{3} [(x-\beta)^3]_{\beta}^0 + \frac{1-a}{3} [(x-\alpha)^3]_0^{\alpha} = \frac{1-a}{3} (-\beta)^3 - \frac{1-a}{3} (-\alpha)^3 \\ &= \frac{1-a}{3} \cdot \frac{27}{64(1-a)^3} + \frac{1-a}{3} \cdot \frac{27}{64(1-a)^3} = \frac{9}{32(1-a)^2} \end{aligned}$$

[解説]

接する放物線どうして挟まれた部分の面積を求める問題です。基本的な頻出題です。

5

問題のページへ

$$(1) \quad C \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ay + bz & ax + bw \\ aw + bx & az + by \end{pmatrix}$$

条件より, $ay + bz = 1 \cdots \cdots \textcircled{1}$, $ax + bw = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$

$aw + bx = 0 \cdots \cdots \textcircled{3}$, $az + by = -1 \cdots \cdots \textcircled{4}$

$\textcircled{1}\textcircled{4}$ より, $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ となり, $a^2 \neq b^2$ から,

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2 - b^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2 - b^2} \begin{pmatrix} a + b \\ -a - b \end{pmatrix} = \frac{1}{a - b} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\textcircled{2}\textcircled{3}$ より, $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となり, $a^2 \neq b^2$ から,

$$\begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2 - b^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

以上より, $C = \frac{1}{a - b} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ となる。

$$(2) \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{とおくと, 条件より,}$$

$aA_{n+1}P + bPA_n = D \cdots \cdots \textcircled{5}$, $aCP + bPC = D \cdots \cdots \textcircled{6}$

$\textcircled{5}\textcircled{6}$ より, $a(A_{n+1} - C)P + bP(A_n - C) = O$, $(A_{n+1} - C)P = -\frac{b}{a}P(A_n - C)$

ここで, $A_n - C = B_n$ とおくと, $B_{n+1}P = -\frac{b}{a}PB_n$ となる。

さらに, $P^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = P$ から,

$$B_{n+1} = -\frac{b}{a}PB_nP^{-1} = -\frac{b}{a}PB_nP$$

これより帰納的に, $B_n = \left(-\frac{b}{a}\right)^{n-1} P^{n-1} B_1 P^{n-1}$ となり,

$$A_n = C + \left(-\frac{b}{a}\right)^{n-1} P^{n-1} B_1 P^{n-1}$$

$$\text{さて, } B_1 = A_1 - C = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{a-b} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{a-b} \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

また, $P^{-1} = P$ から $P^2 = E$ (E は単位行列) であり, n が偶数のときは $P^n = E$, n が奇数のときは $P^n = P$ となるので, n を偶奇に分けて A_n を計算する。

(i) $n - 1$ が偶数 (n が奇数) のとき

$$A_n = C + \left(-\frac{b}{a}\right)^{n-1} EB_1E = C + \left(-\frac{b}{a}\right)^{n-1} B_1$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{a-b} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{a-b} \left(-\frac{b}{a}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{b}{a} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{a-b} \begin{pmatrix} 0 & 1 + \left(-\frac{b}{a}\right)^n \\ -1 + \left(-\frac{b}{a}\right)^{n-1} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{a-b} \begin{pmatrix} 0 & 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n \\ -1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{n-1} & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(ii) $n-1$ が奇数 (n が偶数) のとき

$$\begin{aligned}
A_n &= C + \left(-\frac{b}{a}\right)^{n-1} P B_1 P \\
&= \frac{1}{a-b} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{a-b} \left(-\frac{b}{a}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{b}{a} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{a-b} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{a-b} \left(-\frac{b}{a}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{b}{a} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{a-b} \begin{pmatrix} 0 & 1 + \left(-\frac{b}{a}\right)^{n-1} \\ -1 + \left(-\frac{b}{a}\right)^n & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{a-b} \begin{pmatrix} 0 & 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{n-1} \\ -1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(3) $n \rightarrow \infty$ のとき A_n のすべての成分が収束するための条件は、 $a \neq \pm b$ より、

$$-1 < \frac{b}{a} < 1, \quad \left|\frac{b}{a}\right| < 1, \quad |a| > |b|$$

よって、 $a^2 > b^2$ である。

[解説]

行列と漸化式の融合問題です。誘導がついており、その利用方法も明快なのですが、結論に至るまでの計算量はかなりのものです。

6

問題のページへ

$$\begin{aligned}
 (1) \quad f(x) &= \frac{\cos 2x - 2}{a \cos x + 1} \text{ に対して,} \\
 f'(x) &= \frac{-2 \sin 2x (a \cos x + 1) - (\cos 2x - 2)(-a \sin x)}{(a \cos x + 1)^2} \\
 &= \frac{\sin x \{-4 \cos x (a \cos x + 1) + a(2 \cos^2 x - 3)\}}{(a \cos x + 1)^2} \\
 &= -\frac{\sin x (2a \cos^2 x + 4 \cos x + 3a)}{(a \cos x + 1)^2}
 \end{aligned}$$

ここで、 $g(x) = 2a \cos^2 x + 4 \cos x + 3a$ とおくと、 $f(x)$ が $0 \leq x \leq \pi$ で減少関数となる条件は、 $0 < x < \pi$ において $g(x) \geq 0$ と同値である。

さらに、 $t = \cos x$ 、 $h(t) = g(x)$ とおくと、 $0 < x < \pi$ から $-1 < t < 1$ のもとで、

$$h(t) = 2at^2 + 4t + 3a = 2a\left(t + \frac{1}{a}\right)^2 - \frac{2}{a} + 3a$$

$0 < a < 1$ から $-\frac{1}{a} < -1$ となるので、 $-1 < t < 1$ において $h(t) \geq 0$ となる条件は、

$$h(-1) = 5a - 4 \geq 0, \quad a \geq \frac{4}{5}$$

よって、 $0 < a < 1$ より、 $\frac{4}{5} \leq a < 1$ である。

(2) (i) $\frac{4}{5} \leq a < 1$ のとき

(1)より、 $f(x)$ は $0 \leq x \leq \pi$ で減少関数なので、最大値は $f(0)$ である。

(ii) $0 < a < \frac{4}{5}$ のとき

$h(-1) = 5a - 4 < 0$ 、 $h(1) = 5a + 4 > 0$ より、 $-1 < t < 1$ において $h(t) = 0$ となる t がただ 1 つ存在し、これを $t = \alpha$ とおく。すると、 $-1 \leq t < \alpha$ において $h(t) < 0$ 、 $\alpha < t \leq 1$ において $h(t) > 0$ となる。

さらに、 $\alpha = \cos \beta$ とおくと、 $\beta < x \leq \pi$ において $g(x) < 0$ 、 $0 \leq x < \beta$ において $g(x) > 0$ となる。

よって、 $f(x)$ の増減は右表のようになり、

x	0	...	β	...	π
$f'(x)$	0	-	0	+	0
$f(x)$		\searrow		\nearrow	

$$f(0) - f(\pi) = -\frac{1}{a+1} - \frac{1}{a-1} = \frac{-2a}{(a+1)(a-1)} > 0$$

以上より、 $0 \leq x \leq \pi$ における $f(x)$ の最大値は $f(0)$ である。

[解説]

一見、平易に見えますが、関数の増減に関する興味深い問題です。置き換えを行って、思考の対象を絞る、グラフをイメージしながら解きました。