1

解答解説のページへ

定数 $a,\ b,\ c,\ p,\ q$ を整数とし，次の x と y の 3 つの多項式

$$P=(x+a)^2-9c^2(y+b)^2,\quad Q=(x+11)^2+13(x+11)y+36y^2$$

$$R=x^2+(p+2q)xy+2pqy^2+4x+(11p-14q)y-77$$

を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 多項式 $P,\ Q,\ R$ を因数分解せよ。

(2) P と Q, Q と R, R と P は，それぞれ $x,\ y$ の 1 次式を共通因数としてもっているものとする。このときの整数 $a,\ b,\ c,\ p,\ q$ を求めよ。

2

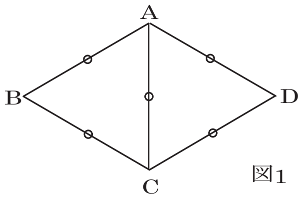
解答解説のページへ

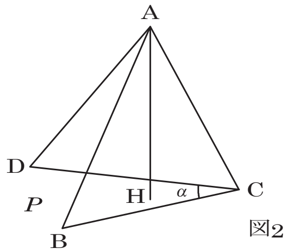
袋の中に 1 から 7 までの番号が書かれた球が 7 個入っている。ここから同時に 3 個の球を取り出す。取り出された 3 個の球に書かれている数を大きいものから順に X, Y, Z とする。X, Y, Z それぞれの期待値を求めよ。ただし, 7 個の球にはそれぞれ互いに異なる 1 個の番号が書かれていて, どの球も取り出される確率は皆等しいものとする。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

図 1 のような $\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CD}=\mathrm{DA}=\mathrm{AC}=1$ である四角形 ABCD を考える。この四角形 ABCD を AC で折り，図 2 のように点 B，C，D が平面 P にのるように置く。図 2 に現れる辺 CB と辺 CD とがなす角を α（$\alpha=\angle\mathrm{BCD}$）とし，$0°<\alpha<120°$ とする。以下の問いに答えよ。





(1) 図 2 において，A から平面 P に下ろした垂線が P と交わる点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ と α とで表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ の長さを α を用いて表せ。

(3) H が図 2 における△BCD の重心となるときの角度 α を求めよ。

4

解答解説のページへ

連立不等式 $1 \leqq x \leqq 2,\ y \leqq 0$ が表す xy 平面内の領域を D とする。また, a を定数とし, 不等式 $y \geqq x^2 - 3ax + 2a^2$ が表す xy 平面内の領域を E とする。以下の問いに答えよ。

(1) D と E とが共有点をもつような実数 a の範囲を求めよ。

(2) (1)の範囲の a に対して, D と E との共通部分の面積 $S(a)$ を求めよ。

(3) (2)で求めた $S(a)$ の最大値を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　多項式 P, Q, R を因数分解すると,

$$P=(x+a)^2-9c^2(y+b)^2=\{x+a+3c(y+b)\}\{x+a-3c(y+b)\}$$
$$=(x+3cy+a+3bc)(x-3cy+a-3bc)$$
$$Q=(x+11)^2+13(x+11)y+36y^2=(x+11+9y)(x+11+4y)$$
$$=(x+9y+11)(x+4y+11)$$
$$R=x^2+(p+2q)xy+2pqy^2+4x+(11p-14q)y-77$$
$$=x^2+(py+2qy+4)x+2pqy^2+(11p-14q)y-77$$
$$=x^2+(py+2qy+4)x+(py-7)(2qy+11)$$
$$=(x+py-7)(x+2qy+11)$$

(2)　まず, P と Q が 1 次式を共通因数としてもち，しかも c が整数より,

(i)　$3c=9$，$a+3bc=11$ のとき　$c=3$，$a+9b=11$

(ii)　$-3c=9$，$a-3bc=11$ のとき　$c=-3$，$a+9b=11$

(i)(ii)より，$c=\pm3$，$a+9b=11$ ………①

また, Q と R が 1 次式を共通因数としてもち，しかも q が整数より,

$2q=4$，$q=2$ ………②

①②より，$P=(x+9y+11)(x-9y+a-9b)$，$R=(x+py-7)(x+4y+11)$

さらに, R と P が 1 次式を共通因数としてもち，しかも p が整数より,

$p=-9$，$a-9b=-7$ ………③

①③より，$a=2$，$b=1$

［解 説］

因数分解を題材とした基本問題です。ただ，注意を怠ると，(2)で(i)と(ii)の場合があるのを忘れてしまいます。

2

問題のページへ

まず，異なる 7 個の球から 3 個を取り出す ${}_7\mathrm{C}_3 = 35$ 通りが，同様に確からしい。

さて，$X = k\ (3 \leqq k \leqq 7)$ となるのは，$k-1$ 以下の番号が書かれている球から 2 個取り出す場合より，その確率は，

$$\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_3} = \frac{(k-1)(k-2)}{70}$$

X	3	4	5	6	7
確率	$\frac{2}{70}$	$\frac{6}{70}$	$\frac{12}{70}$	$\frac{20}{70}$	$\frac{30}{70}$

よって，その期待値 $E(X)$ は，

$$E(X) = \frac{1}{70}(3\times2 + 4\times6 + 5\times12 + 6\times20 + 7\times30) = 6$$

次に，$Y = k\ (2 \leqq k \leqq 6)$ となるのは，$k-1$ 以下の番号が書かれている球から 1 個，$k+1$ 以上の番号が書かれている球から 1 個取り出す場合より，その確率は，

$$\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_1 \times {}_{7-k}\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_3} = \frac{(k-1)(7-k)}{35}$$

Y	2	3	4	5	6
確率	$\frac{5}{35}$	$\frac{8}{35}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{8}{35}$	$\frac{5}{35}$

よって，その期待値 $E(Y)$ は，

$$E(Y) = \frac{1}{35}(2\times5 + 3\times8 + 4\times9 + 5\times8 + 6\times5) = 4$$

さらに，$Z = k\ (1 \leqq k \leqq 5)$ となるのは，$k+1$ 以上の番号が書かれている球から 2 個取り出す場合より，その確率は，

$$\frac{{}_{7-k}\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_3} = \frac{(7-k)(6-k)}{70}$$

Z	1	2	3	4	5
確率	$\frac{30}{70}$	$\frac{20}{70}$	$\frac{12}{70}$	$\frac{6}{70}$	$\frac{2}{70}$

よって，その期待値 $E(Z)$ は，

$$E(Z) = \frac{1}{35}(1\times30 + 2\times20 + 3\times12 + 4\times6 + 5\times2) = 2$$

［解 説］

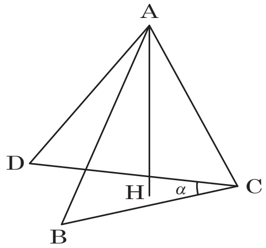
期待値に関する基本的な問題です。各変数のとりうる場合が少ないので，直接的に計算をしました。

3

問題のページへ

(1) x, y を実数として，$\overrightarrow{\mathrm{CH}} = x\overrightarrow{\mathrm{CB}} + y\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = x\overrightarrow{\mathrm{CB}} + y\overrightarrow{\mathrm{CD}} - \overrightarrow{\mathrm{CA}}$ となる。

ここで，条件より，$|\overrightarrow{\mathrm{CA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{CB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{CD}}| = 1$



$$\overrightarrow{\mathrm{CA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = \overrightarrow{\mathrm{CA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CB}} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = 1 \cdot 1 \cdot \cos\alpha = \cos\alpha$$

まず，$\overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CB}} = 0$ より，$(x\overrightarrow{\mathrm{CB}} + y\overrightarrow{\mathrm{CD}} - \overrightarrow{\mathrm{CA}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{CB}} = 0$

$$x|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|^2 + y\overrightarrow{\mathrm{CD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CB}} - \overrightarrow{\mathrm{CA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CB}} = 0$$

$$x + y\cos\alpha - \frac{1}{2} = 0 \cdots\cdots\cdots ①$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = 0$ より，$(x\overrightarrow{\mathrm{CB}} + y\overrightarrow{\mathrm{CD}} - \overrightarrow{\mathrm{CA}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = 0$

$$x\overrightarrow{\mathrm{CB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} + y|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2 - \overrightarrow{\mathrm{CA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = 0,\ x\cos\alpha + y - \frac{1}{2} = 0 \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より，$\begin{pmatrix} 1 & \cos\alpha \\ \cos\alpha & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ となり，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2(1-\cos^2\alpha)}\begin{pmatrix} 1 & -\cos\alpha \\ -\cos\alpha & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2(1+\cos\alpha)}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \dfrac{1}{2(1+\cos\alpha)}\overrightarrow{\mathrm{CB}} + \dfrac{1}{2(1+\cos\alpha)}\overrightarrow{\mathrm{CD}} - \overrightarrow{\mathrm{CA}}$

(2) (1)より，$x = y = \dfrac{1}{2(1+\cos\alpha)}$ なので，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|^2 = |x\overrightarrow{\mathrm{CB}} + x\overrightarrow{\mathrm{CD}} - \overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2 = x^2 + x^2 + 1 + 2x^2\cos\alpha - 2x \cdot \frac{1}{2} - 2x \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 2(1+\cos\alpha)x^2 - 2x + 1 = \frac{1}{2(1+\cos\alpha)} - 2 \cdot \frac{1}{2(1+\cos\alpha)} + 1$$

$$= \frac{1+2\cos\alpha}{2(1+\cos\alpha)}$$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{AH}}| = \sqrt{\dfrac{1+2\cos\alpha}{2(1+\cos\alpha)}}$ となる。

(3) (1)より，$\overrightarrow{\mathrm{CH}} = \dfrac{1}{2(1+\cos\alpha)}\overrightarrow{\mathrm{CB}} + \dfrac{1}{2(1+\cos\alpha)}\overrightarrow{\mathrm{CD}}$

Hが△BCDの重心となるとき，$\overrightarrow{\mathrm{CH}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{CB}} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ なので，

$$\frac{1}{2(1+\cos\alpha)} = \frac{1}{3},\ \cos\alpha = \frac{1}{2}$$

よって，$0^\circ < \alpha < 120^\circ$ から，$\alpha = 60^\circ$

［解 説］

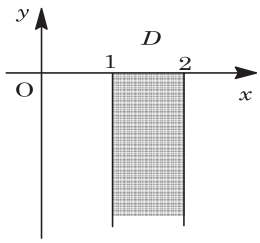
冒頭の $\overrightarrow{\mathrm{CH}} = x\overrightarrow{\mathrm{CB}} + y\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ がポイントとなります。なお，連立方程式は，係数に文字が入っていたので，行列を用いて解いています。

4

問題のページへ

(1)　$D: 1 \leqq x \leqq 2,\ y \geqq 0$，$E: y \geqq x^2 - 3ax + 2a^2$ に対して，領域 E の境界線は，

$$y = x^2 - 3ax + 2a^2 = (x-a)(x-2a) \cdots\cdots\cdots (*)$$



まず，$a \leqq 0$ のときは，領域 D と E は明らかに共有点をもたない。

そこで，$a > 0$ のとき，D と E とが共有点をもつ条件は，(＊)と x 軸の交点が $x = a,\ 2a$ より，$a \leqq 2$ かつ $2a \geqq 1$ である。よって，$\frac{1}{2} \leqq a \leqq 2$ となる。

(2)　(i)　$2a \leqq 2\left(\frac{1}{2} \leqq a \leqq 1\right)$ のとき

$$S(a) = \int_1^{2a} -(x^2 - 3ax + 2a^2)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 3a \cdot \frac{x^2}{2} - 2a^2 x\right]_1^{2a}$$

$$= -\frac{1}{3}(8a^3 - 1) + \frac{3}{2}a(4a^2 - 1) - 2a^2(2a-1) = -\frac{2}{3}a^3 + 2a^2 - \frac{3}{2}a + \frac{1}{3}$$

(ii)　$1 \leqq a\ (1 \leqq a \leqq 2)$ のとき

$$S(a) = \int_a^2 -(x^2 - 3ax + 2a^2)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 3a \cdot \frac{x^2}{2} - 2a^2 x\right]_a^2$$

$$= -\frac{1}{3}(8 - a^3) + \frac{3}{2}a(4 - a^2) - 2a^2(2-a) = \frac{5}{6}a^3 - 4a^2 + 6a - \frac{8}{3}$$

(3)　(i)　$\frac{1}{2} \leqq a \leqq 1$ のとき

$$S'(a) = -2a^2 + 4a - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}(2a-1)(2a-3)$$

右表より，$S(a)$ は単調に増加する。

a	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$S'(a)$	0	$+$	
$S(a)$		$\nearrow$	$\frac{1}{6}$

(ii)　$1 \leqq a \leqq 2$ のとき

$$S'(a) = \frac{5}{2}a^2 - 8a + 6$$

$$= \frac{1}{2}(5a-6)(a-2)$$

$S(a)$ の増減は右表のようになる。

a	1	$\cdots$	$\frac{6}{5}$	$\cdots$	2
$S'(a)$		$+$	0	$-$	0
$S(a)$	$\frac{1}{6}$	$\nearrow$	$\frac{16}{75}$	$\searrow$	

(i)(ii)より，$S(a)$ の最大値は，

$$S\left(\frac{6}{5}\right) = \frac{16}{75}$$

［解 説］

頻出の放物線と面積の問題です。領域で味付けがしてありますが。