1

解答解説のページへ

連立不等式 $x^2-6x+y^2+5\leqq 0$，$x+y\leqq 5$ の表す領域 D を図示せよ。また，曲線 $x^2+y^2-2ax-2y+a^2=0$ が D の点を通るような実数 a の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

図 1 のような $AB=BC=CD=DA=AC=1$ である四角形 ABCD を考える。この四角形 ABCD を AC で折り，図 2 のように点 B，C，D が平面 P にのるように置く。図 2 に現れる辺 CB と辺 CD とがなす角を α（$\alpha=\angle BCD$）とし，$0°<\alpha<120°$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) 図 2 において，A から平面 P に下ろした垂線が P と交わる点を H とする。$\overrightarrow{AH}$ を $\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{CD}$ と α とで表せ。

(2) $\overrightarrow{AH}$ の長さを α を用いて表せ。

(3) H が図 2 における△BCD の重心となるときの角度 α を求めよ。

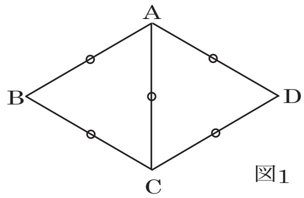


図1

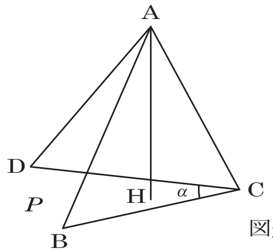


図2

3

解答解説のページへ

ある商店街が次のようなくじを計画した。商店街の各商店は 1000 円の買い物ごとの 1 枚の抽選券を客に配布し，また，配布した抽選券 1 枚につき手数料 35 円をくじを管理する組合に拠出する。客は抽選券の枚数と同じ回数のくじを引くことができる。くじは 500 個の球の入った袋をよくかきまぜて 1 個取り出す方式で行われ，500 個の球のうち 1 個だけが当たりとし，取り出された球はそのつど袋に戻すことにする。そして，当たり球が出たならば 1 万円相当の景品がもらえ，外れたならば景品は無いことにする。以下の問いに答えよ。

(1)　10 枚の抽選券を使ってくじを引く人がもらえる景品の相当額の期待値を求めよ。

(2)　それぞれが 4 枚の抽選券を使ってくじを引く客が 2 人いるとする。各人が 4 回くじを引いたとき，当たり外れの順序が完全に一致する確率を求めよ。ただし，小数点第 3 位は四捨五入せよ。

(3)　くじに要する経費は，抽選券の配布枚数に関係のない管理運営費 30 万円と景品代との合計であるとする。くじ管理組合に拠出されたお金でくじに要する経費の期待値がまかなえるためには，商店街全体として商品売り上げ目標をいくら以上にすればよいか。

4

解答解説のページへ

$x>0$ において，関数 $f(x)=x\sin\dfrac{\pi}{x}$ を考える。関数 $f(x)$ の導関数を $f'(x)$ と書くことにし，以下の問いに答えよ。

(1)　$f'(2)$ を求め, $x>2$ のとき $f'(x)<1$ であることを示せ。

(2)　k が自然数のとき，$f'\left(\dfrac{1}{k}\right)$ を求めよ。

(3)　$f'(x)=1$ となる x を値の大きいものから順に，x_1，x_2，x_3，…とおく。$n\geqq 2$ である自然数 n に対して，$\dfrac{1}{n}<x_n<\dfrac{1}{n-1}$ を示せ。

(4)　$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ を求めよ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

3 次正方行列 A, B, O を

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\quad O=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

とする。以下の問いに答えよ。

(1)　2 以上の自然数 k に対して，$(A+B)^k$ を求めよ。

(2)　すべての自然数 m, n に対して，A^mB^n および B^nA^m を求めよ。

(3)　等式 $(A+B)X=X(A+B)=O$ を満たす 3 次正方行列 $X=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\\z_1&z_2&z_3\end{pmatrix}$ を求めよ。

$\boxed{6}$

解答解説のページへ

連立不等式 $1 \leqq x \leqq 2,\ y \leqq 0$ が表す xy 平面内の領域を D とする。また, a を定数とし, 不等式 $y \geqq x^2 - 3ax + 2a^2$ が表す xy 平面内の領域を E とする。以下の問いに答えよ。

(1) D と E とが共有点をもつような実数 a の範囲を求めよ。

(2) (1)の範囲の a に対して, D と E との共通部分の面積 $S(a)$ を求めよ。

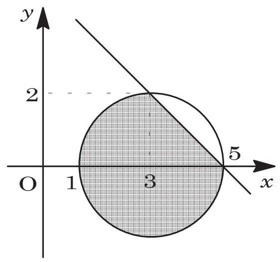
(3) (2)で求めた $S(a)$ の最大値を求めよ。

1

問題のページへ

領域 D: $x^2-6x+y^2+5\leqq 0$, $x+y\leqq 5$ より,

$$(x-3)^2+y^2\leqq 4,\ \ y\leqq -x+5$$

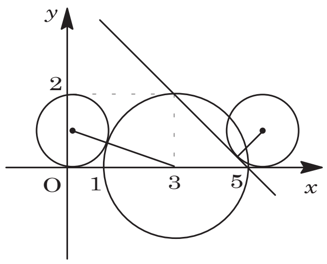


領域 D を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

また，曲線 $x^2+y^2-2ax-2y+a^2=0$ に対して,

$$(x-a)^2+(y-1)^2=1\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

すると，方程式$(*)$は，中心$(a,\ 1)$，半径 1 の円を表す。



右図より，実数 a が最大となるのは，円$(*)$が領域 D の境界線 $x+y-5=0$ に接するときなので,

$$\frac{|a+1-5|}{\sqrt{1^2+1^2}}=1,\ \ |a-4|=\sqrt{2}$$

$a>4$ より, a の最大値は，$a=4+\sqrt{2}$ である。

また，実数 a が最小となるのは，円$(*)$が領域 D の境界線 $(x-3)^2+y^2=4$ に接するときなので,

$$\sqrt{(a-3)^2+1^2}=2+1,\ \ (a-3)^2=8$$

$a<3$ より, a の最小値は，$a=3-2\sqrt{2}$ である。

［解 説］

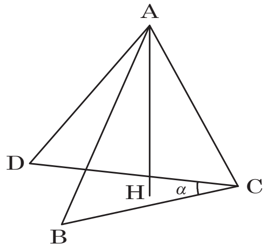
領域と最大・最小を組み合わせた問題です。円と直線，円と円が接する条件の処理がポイントです。

2

問題のページへ

(1) x, y を実数として，$\overrightarrow{CH}=x\overrightarrow{CB}+y\overrightarrow{CD}$ とおくと，$\overrightarrow{AH}=x\overrightarrow{CB}+y\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA}$ となる。

ここで，条件より，$|\overrightarrow{CA}|=|\overrightarrow{CB}|=|\overrightarrow{CD}|=1$



$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=1\cdot1\cdot\cos60^\circ=\frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}=1\cdot1\cdot\cos\alpha=\cos\alpha$$

まず，$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CB}=0$ より，$(x\overrightarrow{CB}+y\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA})\cdot\overrightarrow{CB}=0$

$$x|\overrightarrow{CB}|^2+y\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$$

$$x+y\cos\alpha-\frac{1}{2}=0\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ より，$(x\overrightarrow{CB}+y\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA})\cdot\overrightarrow{CD}=0$

$$x\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}+y|\overrightarrow{CD}|^2-\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\ x\cos\alpha+y-\frac{1}{2}=0\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\begin{pmatrix}1 & \cos\alpha\\ \cos\alpha & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ となり，

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\frac{1}{2(1-\cos^2\alpha)}\begin{pmatrix}1 & -\cos\alpha\\ -\cos\alpha & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2(1+\cos\alpha)}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

よって，$\overrightarrow{AH}=\dfrac{1}{2(1+\cos\alpha)}\overrightarrow{CB}+\dfrac{1}{2(1+\cos\alpha)}\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA}$

(2) (1)より，$x=y=\dfrac{1}{2(1+\cos\alpha)}$ なので，

$$|\overrightarrow{AH}|^2=|x\overrightarrow{CB}+x\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA}|^2=x^2+x^2+1+2x^2\cos\alpha-2x\cdot\frac{1}{2}-2x\cdot\frac{1}{2}$$

$$=2(1+\cos\alpha)x^2-2x+1=\frac{1}{2(1+\cos\alpha)}-2\cdot\frac{1}{2(1+\cos\alpha)}+1$$

$$=\frac{1+2\cos\alpha}{2(1+\cos\alpha)}$$

よって，$|\overrightarrow{AH}|=\sqrt{\dfrac{1+2\cos\alpha}{2(1+\cos\alpha)}}$ となる。

(3) (1)より，$\overrightarrow{CH}=\dfrac{1}{2(1+\cos\alpha)}\overrightarrow{CB}+\dfrac{1}{2(1+\cos\alpha)}\overrightarrow{CD}$

H が△BCD の重心となるとき，$\overrightarrow{CH}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CD}$ なので,

$$\frac{1}{2(1+\cos\alpha)}=\frac{1}{3},\ \cos\alpha=\frac{1}{2}$$

よって，$0^\circ<\alpha<120^\circ$ から，$\alpha=60^\circ$

［解 説］

冒頭の $\overrightarrow{CH}=x\overrightarrow{CB}+y\overrightarrow{CD}$ がポイントとなります。なお，連立方程式は，係数に文字が入っていたので，行列を用いて解いています。

3

問題のページへ

(1)　$0\leqq k\leqq 10$ として, 10 回引いて k 回当たる確率 P_k は,

$$P_k={}_{10}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{500}\right)^k\left(\frac{499}{500}\right)^{10-k}$$

よって, 景品の相当額の期待値 E は,

$$E=\sum_{k=0}^{10}10^4k\cdot P_k=10^4\sum_{k=1}^{10}k\cdot{}_{10}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{500}\right)^k\left(\frac{499}{500}\right)^{10-k}$$

$$=10^4\sum_{k=1}^{10}10\cdot{}_9\mathrm{C}_{k-1}\left(\frac{1}{500}\right)^k\left(\frac{499}{500}\right)^{10-k}=\frac{10^5}{500}\sum_{k=1}^{10}{}_9\mathrm{C}_{k-1}\left(\frac{1}{500}\right)^{k-1}\left(\frac{499}{500}\right)^{10-k}$$

$$=200\left(\frac{1}{500}+\frac{499}{500}\right)^9=200$$

(2)　1 回くじを引いたとき, 2 人がともに当たりまたは外れの確率 q は,

$$q=\left(\frac{1}{500}\right)^2+\left(\frac{499}{500}\right)^2=\left(\frac{1}{500}\right)^2+\left(1-\frac{1}{500}\right)^2=1-\frac{1}{250}+\frac{2}{500^2}$$

ここで, $a=\dfrac{2}{500^2}=8\times10^{-6}$ とおくと, $10^{-6}<a<10^{-5}$ となり, 4 回くじを引いたとき, 当たり外れの順序が一致する確率は,

$$q^4=\left(1-\frac{1}{250}+a\right)^4=\left(1-\frac{1}{250}\right)^4+{}_4\mathrm{C}_1\left(1-\frac{1}{250}\right)^3a+\cdots\cdots+a^4$$

さて, ${}_4\mathrm{C}_1\left(1-\dfrac{1}{250}\right)^3a<4\times10^{-5}$ から, q^4 の小数第 3 位までは $\left(1-\dfrac{1}{250}\right)^4$ を展開した値によって決定するので,

$$\left(1-\frac{1}{250}\right)^4=1-{}_4\mathrm{C}_1\frac{1}{250}+{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{250}\right)^2-{}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{250}\right)^3+\left(\frac{1}{250}\right)^4$$

$$=1-1.6\times10^{-2}+9.6\times10^{-5}-2.56\times10^{-7}+2.56\times10^{-10}$$

よって, q^4 の小数第 3 位までは $1-1.6\times10^{-2}=0.984$ より, $q^4\fallingdotseq0.98$ となる。

(3)　抽選券を x 枚配布したとすると, 景品の相当額の期待値は, (1)と同様にして, $20x$ 円となるので, くじに要する経費は $300000+20x$ 円となる。

また, くじ管理組合に拠出された手数料は $35x$ 円なので, 条件より,

$$35x\geqq300000+20x\,,\ \ x\geqq20000$$

よって, 商店街の商品売り上げ目標は, $1000\times20000=2000$ 万円以上である。

[解　説]

(1)では数 C の知識を前提としない解法をとり, 組合せの公式 $k{}_n\mathrm{C}_k=n{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$ と二項定理を利用しています。また, (2)は, 答を大雑把に導くことは容易なのですが, 誤差の処理は面倒です。もう少し丁寧に書いた方がよかったかもしれません。

4

問題のページへ

(1)　$f(x)=x\sin\dfrac{\pi}{x}$ に対し，$f'(x)=\sin\dfrac{\pi}{x}+x\cos\dfrac{\pi}{x}\cdot\left(-\dfrac{\pi}{x^2}\right)=\sin\dfrac{\pi}{x}-\dfrac{\pi}{x}\cos\dfrac{\pi}{x}$ から，

$$f'(2)=\sin\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}=1$$

また，$f''(x)=\cos\dfrac{\pi}{x}\cdot\left(-\dfrac{\pi}{x^2}\right)+\dfrac{\pi}{x^2}\cos\dfrac{\pi}{x}+\dfrac{\pi}{x}\sin\dfrac{\pi}{x}\cdot\left(-\dfrac{\pi}{x^2}\right)=-\dfrac{\pi^2}{x^3}\sin\dfrac{\pi}{x}$ ………①

ここで, $x>2$ のとき $0<\dfrac{\pi}{x}<\dfrac{\pi}{2}$ から，$f''(x)<0$ となり，

$$f'(x)<f'(2)=1$$

(2)　(1)より，$f'\left(\dfrac{1}{k}\right)=\sin k\pi-k\pi\cos k\pi=-k\pi(-1)^k=(-1)^{k+1}k\pi$

(3)　まず, (1)から $f'(x)=1$ となる x の最大の値は 2 より，$x_1=2$ である。

次に，$1<x\leqq 2$ のとき $\dfrac{\pi}{2}\leqq\dfrac{\pi}{x}<\pi$ から $f''(x)<0$ であり，この区間で $f'(x)$ は単調減少をするので，$x_2<1$ となる。

さて, $k\geqq 1$ のとき，①から $f''\left(\dfrac{1}{k}\right)=0$ となり, (2)より，

$$\left|f'\left(\frac{1}{k}\right)\right|=|(-1)^{k+1}k\pi|=k\pi>1 \text{ ………②}$$

また, $n\geqq 2$ のとき，$\dfrac{1}{n}<x<\dfrac{1}{n-1}$ において，$(n-1)\pi<\dfrac{\pi}{x}<n\pi$ から，

(i)　n が偶数のとき　$f''(x)>0$

(ii)　n が奇数のとき　$f''(x)<0$

よって，区間 $\dfrac{1}{n}<x<\dfrac{1}{n-1}$ において $f'(x)$ は単調増加または単調減少であり，②から，この区間内に $f'(x)=1$ となる x がただ 1 つ存在する。

以上より，$\dfrac{1}{2}<x_2<\dfrac{1}{1}$，$\dfrac{1}{3}<x_3<\dfrac{1}{2}$，…となるので，$\dfrac{1}{n}<x_n<\dfrac{1}{n-1}$ である。

(4)　(3)より, $n\to\infty$ のとき $\dfrac{1}{n}\to 0$，$\dfrac{1}{n-1}\to 0$ から $x_n\to 0$ となり，合わせて，

$$|f(x_n)|=\left|x_n\sin\frac{\pi}{x_n}\right|\leqq|x_n|$$

したがって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}f(x_n)=0$

［解 説］

下書きとして，$f''(x)$ の符号変化から $f'(x)$ のグラフを想像して描き，それを見ながら方針を立てました。なお, (4)は意外な設問でした。

5

問題のページへ

(1)　$A+B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$から,

$$(A+B)^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$(A+B)^3=(A+B)^2(A+B)=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

これより, $k\geqq 2$ のとき, $(A+B)^k=(A+B)^2$ と予測でき, この予測が正しいことを数学的帰納法を用いて証明する。

(i)　$k=2$ のとき　明らかに成立する。

(ii)　$k=l$ のとき　$(A+B)^l=(A+B)^2$ と仮定する。

$$(A+B)^{l+1}=(A+B)^2(A+B)=(A+B)^3=(A+B)^2$$

(i)(ii)より, $(A+B)^k=(A+B)^2=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ である。

(2)　$A^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=A$ より, 帰納的に $A^m=A$ である。

$$AB=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$AB^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=O$$

以上より, $n=1$ のとき $A^mB^n=AB=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, $n\geqq 2$ のとき $A^mB^n=O$

また, $BA=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$$B^2A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=O$$

以上より，$n=1$ のとき $B^nA^m=BA=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，$n\geqq 2$ のとき $B^nA^m=O$

(3)　$(A+B)X=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\\z_1&z_2&z_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1&y_2&y_3\\y_1+z_1&y_2+z_2&y_3+z_3\\0&0&0\end{pmatrix}$

$(A+B)X=O$ なので，$y_1=y_2=y_3=z_1=z_2=z_3=0$ となり，このとき，

$$X(A+B)=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&x_1+x_2&x_2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

さらに，$X(A+B)=O$ なので，$x_1=x_2=0$ である。

以上より，$X=\begin{pmatrix}0&0&x_3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$（$x_3$ は任意の数）

［解 説］

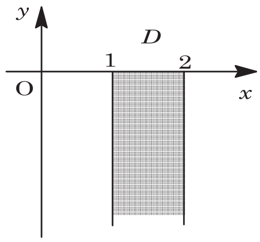
3 次の正方行列の計算問題です。3 つの小問の関連はほとんどありません。

$\boxed{6}$

問題のページへ

(1)　$D: 1 \leqq x \leqq 2,\ \ y \geqq 0$，$E: y \geqq x^2 - 3ax + 2a^2$ に対して，領域 E の境界線は,

$$y = x^2 - 3ax + 2a^2 = (x-a)(x-2a) \cdots\cdots\cdots (*)$$



まず，$a \leqq 0$ のときは，領域 D と E は明らかに共有点をもたない。

そこで，$a > 0$ のとき，D と E とが共有点をもつ条件は，$(*)$と x 軸の交点が $x = a,\ 2a$ より，$a \leqq 2$ かつ $2a \geqq 1$ である。よって，$\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq 2$ となる。

(2)　(i)　$2a \leqq 2\left(\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq 1\right)$ のとき

$$S(a) = \int_1^{2a} -(x^2 - 3ax + 2a^2)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 3a\cdot\frac{x^2}{2} - 2a^2x\right]_1^{2a}$$

$$= -\frac{1}{3}(8a^3 - 1) + \frac{3}{2}a(4a^2 - 1) - 2a^2(2a - 1) = -\frac{2}{3}a^3 + 2a^2 - \frac{3}{2}a + \frac{1}{3}$$

(ii)　$1 \leqq a\ (1 \leqq a \leqq 2)$ のとき

$$S(a) = \int_a^{2} -(x^2 - 3ax + 2a^2)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 3a\cdot\frac{x^2}{2} - 2a^2x\right]_a^{2}$$

$$= -\frac{1}{3}(8 - a^3) + \frac{3}{2}a(4 - a^2) - 2a^2(2 - a) = \frac{5}{6}a^3 - 4a^2 + 6a - \frac{8}{3}$$

(3)　(i)　$\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq 1$ のとき

$$S'(a) = -2a^2 + 4a - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}(2a-1)(2a-3)$$

右表より，$S(a)$ は単調に増加する。

a	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$S'(a)$	0	$+$	
$S(a)$		$\nearrow$	$\frac{1}{6}$

(ii)　$1 \leqq a \leqq 2$ のとき

$$S'(a) = \frac{5}{2}a^2 - 8a + 6$$

$$= \frac{1}{2}(5a - 6)(a - 2)$$

$S(a)$ の増減は右表のようになる。

a	1	$\cdots$	$\frac{6}{5}$	$\cdots$	2
$S'(a)$		$+$	0	$-$	0
$S(a)$	$\frac{1}{6}$	$\nearrow$	$\frac{16}{75}$	$\searrow$	

(i)(ii)より，$S(a)$ の最大値は,

$$S\left(\frac{6}{5}\right) = \frac{16}{75}$$

［解 説］

頻出の放物線と面積の問題です。領域で味付けがしてありますが。