1

解答解説のページへ

nを2以上の自然数とし，整式x^nを$x^2-6x-12$で割った余りをa_nx+b_nとする。

(1) a_2，b_2を求めよ。

(2) a_{n+1}，b_{n+1}をa_nとb_nを用いて表せ。

(3) 各nに対して，a_nとb_nの公約数で素数となるものをすべて求めよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

$\angle$C を直角とする直角三角形 ABC に対して，$\angle$A の二等分線と線分 BC の交点を D とする。また，線分 AD, DC, CA の長さはそれぞれ 5, 3, 4 とする。$\angle \mathrm{A} = \theta$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\sin\theta$ を求めよ。

(2)　$\theta < \dfrac{5}{12}\pi$ を示せ。ただし，$\sqrt{2} = 1.414\cdots$，$\sqrt{3} = 1.732\cdots$ を用いてもよい。

3

解答解説のページへ

xy 平面の 3 点 $\mathrm{A}(0,\ 0)$，$\mathrm{B}(2,\ 0)$，$\mathrm{C}(1,\ \sqrt{3})$ を頂点とする△ABC に対して以下の問いに答えよ。

(1)　$0 \leqq a \leqq \sqrt{3}$ を満たす定数 a に対して，点 $\mathrm{P}(x,\ a)$ が△ABC に含まれるための x の範囲を求めよ。

(2)　(1)の定数 a に対して，(1)で求められた範囲を x が動くとき，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$ の最小値と，そのときの x の値を求めよ。

(3)　点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が△ABC に含まれるとき，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$ の最小値と，そのときの点 P の座標 $(x,\ y)$ を求めよ。

4

解答解説のページへ

関数 $f(x)$ が，$f(x)=x^2-x\int_0^2|f(t)|dt$ を満たしているとする。このとき，$f(x)$ を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　x^2 を $x^2-6x-12$ で割ると，$x^2=(x^2-6x-12)\cdot 1+(6x+12)$ より，

$$a_2=6,\ b_2=12$$

(2)　x^n を $x^2-6x-12$ で割った商を $q_n(x)$ とおくと，条件より，

$$x^n=(x^2-6x-12)q_n(x)+(a_nx+b_n)$$

すると，
$$\begin{aligned}x^{n+1}&=x(x^2-6x-12)q_n(x)+(a_nx^2+b_nx)\\&=x(x^2-6x-12)q_n(x)+a_n\{(x^2-6x-12)+(6x+12)\}+b_nx\\&=(x^2-6x-12)\{xq_n(x)+a_n\}+(6a_n+b_n)x+12a_n\end{aligned}$$

ここで，x^{n+1} を $x^2-6x-12$ で割った余りが $a_{n+1}x+b_{n+1}$ より，

$$a_{n+1}=6a_n+b_n,\ b_{n+1}=12a_n\cdots\cdots\cdots(*)$$

(3)　(1)より $a_2=6$，$b_2=12$ なので，$(*)$から，帰納的に a_n と b_n はともに 6 の倍数であり，素数の公約数として，2 と 3 をもつ。

さて，a_n と b_n が 5 以上の素数 m を公約数としてもつとき，k, l を整数として，

$$a_n=m\cdot k,\ b_n=m\cdot l$$

$(*)$から，$6a_{n-1}+b_{n-1}=m\cdot k$，$12a_{n-1}=m\cdot l$

$$2^2\cdot 3a_{n-1}=m\cdot l,\ 2b_{n-1}=m(2k-l)$$

$m\geqq 5$ より，a_{n-1} と b_{n-1} は素数 m を公約数としてもつ。

すると，帰納的に，a_2 と b_2 は素数 m を公約数としてもつことになるが，これは $a_2=6$，$b_2=12$ に反する。

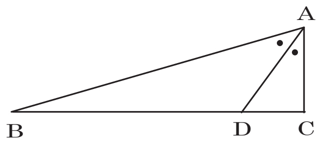
以上より，a_n と b_n の公約数で素数となるものは 2 と 3 のみである。

［解 説］

(3)では，記述はしていませんが，a_3 と b_3 も計算をして結論を推測しています。その後，簡略に書きましたが，帰納法を用いて証明をしています。

$\boxed{2}$

問題のページへ



(1)　条件より，$\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{3}{5}$，$\cos\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{4}{5}$ より，

$$\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=\frac{24}{25}$$

(2)

$$\sin\frac{5}{12}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$$
$$>\frac{1.414}{4}(1+1.732)>0.96=\frac{24}{25}$$

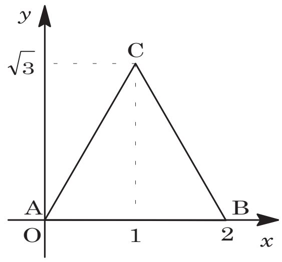
ここで，関数 $f(\theta)=\sin\theta$ は $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において単調に増加し，$\sin\theta<\sin\dfrac{5}{12}\pi$ となることから，$\theta<\dfrac{5}{12}\pi$ である。

［解 説］

数値計算はあるものの，さほど面倒でもなく，あっさりと解決する問題です。

3

問題のページへ



(1)　直線 AC, 直線 BC の方程式は, それぞれ,

$$y=\sqrt{3}x\,,\quad y=-\sqrt{3}(x-2)$$

点 P$(x,\ a)$ が△ABC に含まれるための条件は, $0\leqq a\leqq\sqrt{3}$ より,

$$a\leqq\sqrt{3}x\,,\quad a\leqq-\sqrt{3}(x-2)$$

よって, $\dfrac{a}{\sqrt{3}}\leqq x\leqq 2-\dfrac{a}{\sqrt{3}}$ ………(＊)

(2)　P$(x,\ a)$に対し,

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2&=x^2+a^2+(x-2)^2+a^2+(x-1)^2+(a-\sqrt{3})^2\\&=3x^2+3a^2-6x-2\sqrt{3}a+8\\&=3(x-1)^2+3a^2-2\sqrt{3}a+5\end{aligned}$$

(＊)から, $x=1$ のとき, $\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$ は最小値 $3a^2-2\sqrt{3}a+5$ をとる。

(3)　(2)より, P$(x,\ y)$に対し,

$$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2=3(x-1)^2+3y^2-2\sqrt{3}y+5=3(x-1)^2+3\left(y-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+4$$

よって, $(x,\ y)=\left(1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$は△ABC に含まれることより, この点において $\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$ は最小値 4 をとる。

［解 説］

丁寧すぎると感じるくらいの誘導がついています。(3)だけの出題だったとしても, 難しくはありません。

4

問題のページへ

$f(x)=x^2-x\int_0^2|f(t)|dt$ に対し，$\int_0^2|f(t)|dt=c$ ……(＊)とおくと, $c\geqq 0$ で,

$$f(x)=x^2-cx$$

(＊)に代入して，$c=\int_0^2|t^2-ct|dt$

(i)　$0\leqq c<2$ のとき

$$c=\int_0^c-(t^2-ct)\,dt+\int_c^2(t^2-ct)\,dt=-\left[\frac{t^3}{3}-\frac{ct^2}{2}\right]_0^c+\left[\frac{t^3}{3}-\frac{ct^2}{2}\right]_c^2$$

$$=-\frac{c^3}{3}+\frac{c^3}{2}+\frac{1}{3}(8-c^3)-\frac{c}{2}(4-c^2)=\frac{c^3}{3}-2c+\frac{8}{3}$$

よって，$c^3-9c+8=0$，$(c-1)(c^2+c-8)=0$

すると, $0\leqq c<2$ より，$c=1$ である。

(ii)　$c\geqq 2$ のとき

$$c=\int_0^2-(t^2-ct)\,dt=-\left[\frac{t^3}{3}-\frac{ct^2}{2}\right]_0^2=-\frac{8}{3}+2c$$

よって，$c=\frac{8}{3}$ となり，この値は $c\geqq 2$ を満たす。

(i)(ii)より，$f(x)=x^2-x$，$f(x)=x^2-\frac{8}{3}x$

［解 説］

いわゆる置き換え型の積分方程式です。場合分けはあるものの，常套手段だけで $f(x)$ は求まります。