**1**

解答解説のページへ

$a$ を実数とし，$f(x)=x^3+(2a-4)x^2+(a^2-4a+4)x$ とおく。方程式 $f(x)=0$ が 2 つの異なる実数解をもつとき，以下の問いに答えよ。

(1) $a$ の値の範囲を求めよ。

(2) 関数 $y=f(x)$ の極値を求めよ。

(3) $a$ が(1)で求めた範囲を動くとき，$y=f(x)$ の極大値を与える $x$ について，点 $(x,\ f(x))$ が $xy$ 平面上に描く図形を図示せよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

$a,\ b,\ c,\ d,\ e$ を実数とする。多項式 $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ が次の条件(i), (ii), (iii)をすべて満たすとき, $a, b, c, d, e$ の値を求めよ。

(i) $x^4 f\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(x)$　　(ii) $f(1-x) = f(x)$　　(iii) $f(1) = 1$

**3**

解答解説のページへ

平面上の△$OA_1A_2$は$\angle OA_2A_1=90^\circ$，$OA_1=1$，$OA_2=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$を満たすとする。$A_2$から$OA_1$へ垂線を下ろし，交点を$A_3$とする。$A_3$から$OA_2$へ垂線を下ろし，交点を$A_4$とする。以下同様に，$k=4,\ 5,\ \cdots$について，$A_k$から$OA_{k-1}$へ垂線を下ろし，交点を$A_{k+1}$として，順番に$A_5$，$A_6$，…を定める。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$A_kA_{k+1}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots)$を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{h_k}=\overrightarrow{A_kA_{k+1}}$とおくとき，自然数 $n$ に対して$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{h_k}\cdot\overrightarrow{h_{k+1}}$を求めよ。ただし，$\overrightarrow{h_k}\cdot\overrightarrow{h_{k+1}}$は$\overrightarrow{h_k}$と$\overrightarrow{h_{k+1}}$の内積を表す。

**4**

解答解説のページへ

点 P が次のルール(i), (ii)に従って数直線上を移動するものとする。

(i)　1, 2, 3, 4, 5, 6 の目が同じ割合で出るサイコロを振り，出た目の数を $k$ とする。P の座標 $a$ について，$a>0$ ならば座標 $a-k$ の点へ移動し，$a<0$ ならば座標 $a+k$ の点へ移動する。

(ii)　原点に移動したら終了し，そうでなければ(i)を繰り返す。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　P の座標が 1, 2, …, 6 のいずれかであるとき，ちょうど 2 回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ。

(2)　P の座標が 1, 2, …, 6 のいずれかであるとき，ちょうど 3 回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ。

(3)　P の座標が 7 であるとき，ちょうど $n$ 回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ。

**1**

問題のページへ

(1)　$f(x)=x^3+(2a-4)x^2+(a^2-4a+4)x$ に対し，$f(x)=0$ ……(＊)とすると，

$$x\{x^2+(2a-4)x+(a-2)^2\}=0,\quad x(x+a-2)^2=0$$

よって，(＊)の解は，$x=0,\ -a+2$ となり，異なる 2 つの実数解をもつ条件は，$-a+2\neq 0$ より，$a\neq 2$ である。

(2)　$f'(x)=3x^2+2(2a-4)x+(a-2)^2=(x+a-2)(3x+a-2)$

これより，$f'(x)=0$ の解は，$x=-a+2,\ \dfrac{-a+2}{3}$

(i)　$a>2$ のとき

右表より，極大値は，

$$f(-a+2)=0$$

また，極小値は，

$$f\left(\frac{-a+2}{3}\right)=\frac{-4(a-2)^3}{27}$$

| $x$ | $\cdots$ | $-a+2$ | $\cdots$ | $\dfrac{-a+2}{3}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | 0 | ↘ | $\dfrac{-4(a-2)^3}{27}$ | ↗ |

(ii)　$a<2$ のとき

右表より，極大値は，

$$f\left(\frac{-a+2}{3}\right)=\frac{-4(a-2)^3}{27}$$

また，極小値は，

$$f(-a+2)=0$$

| $x$ | $\cdots$ | $\dfrac{-a+2}{3}$ | $\cdots$ | $-a+2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | $\dfrac{-4(a-2)^3}{27}$ | ↘ | 0 | ↗ |

(3)　$y=f(x)$ の極大値を与える $x$ について，$(x,\ y)=(x,\ f(x))$ とおくと，

(i)　$a>2$ のとき

(2)より，$(x,\ y)=(-a+2,\ 0)$ となるので，その軌跡の方程式は，

$$y=0\ (x<0)$$

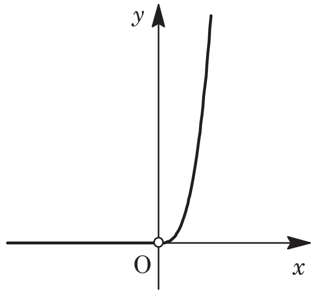
(ii)　$a<2$ のとき

(2)より，$(x,\ y)=\left(\dfrac{-a+2}{3},\ \dfrac{-4(a-2)^3}{27}\right)$ となるので，

その軌跡の方程式は，

$$y=-\frac{4}{27}(-3x)^3=4x^3\ (x>0)$$

(i)(ii)より，点 $(x,\ f(x))$ は，右図の太線を描く。




### [解 説]

方程式 $f(x)=0$ の左辺が 1 次式の積として因数分解できるとは，予想しませんでした。不意を突かれた感じです。

**2**

問題のページへ

$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ に対し，

$$x^4f\left(\frac{1}{x}\right)=x^4\left(\frac{a}{x^4}+\frac{b}{x^3}+\frac{c}{x^2}+\frac{d}{x}+e\right)=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4$$

条件(i)より，$x^4f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)$ なので，

$$ex^4+dx^3+cx^2+bx+a=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$$

よって，$a=e$，$b=d$ ………①

これより，$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+bx+a$ となる。

さらに，条件(iii)より $f(1)=1$ なので，$2a+2b+c=1$ ………②

また，条件(ii)より，$f(1-x)=f(x)$ に $x=0$ を代入すると，①と合わせて，

$$f(1)=f(0)，\ a=1 \text{ ………③}$$

さらに，条件(ii)に $x=-1$ を代入すると，$f(2)=f(-1)$ より，

$$16a+8b+4c+2b+a=a-b+c-b+a，\ 5a+4b+c=0 \text{ ………④}$$

②③④より，$b=-2$，$c=3$ となり，①から，

$$a=1，\ b=-2，\ c=3，\ d=-2，\ e=1$$

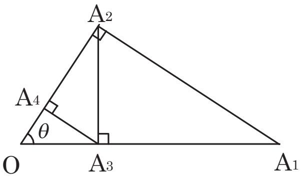
このとき，$f(x)=x^4-2x^3+3x^2-2x+1$ となり，条件(i)(ii)(iii)をすべて満たす。

## ［解 説］

条件(ii)が計算難なので，数値代入で係数を決めています。

**3**

問題のページへ




(1)　$\angle A_1OA_2=\theta$ とおくと，$\cos\theta=\dfrac{OA_2}{OA_1}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より，

$$\sin\theta=\sqrt{1-\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

これより，$A_1A_2=OA_1\sin\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ であり，

$$A_{k+1}A_{k+2}=A_kA_{k+1}\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}A_kA_{k+1}$$

よって，$A_kA_{k+1}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{k-1}$

(2)　$\overrightarrow{A_kA_{k+1}}$ と $\overrightarrow{A_{k+1}A_{k+2}}$ のなす角は，$180°-\theta$ より，

$$\overrightarrow{h_k}\cdot\overrightarrow{h_{k+1}}=\overrightarrow{A_kA_{k+1}}\cdot\overrightarrow{A_{k+1}A_{k+2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{k-1}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{k}\cos(180°-\theta)$$

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{k}$$

よって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{h_k}\cdot\overrightarrow{h_{k+1}}=\frac{-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}}=-\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$

［解 説］

数列の極限についての基本問題です。相似な図形と等比数列が融合した構図となっています。

## 4

問題のページへ

(1)　まず，点 P の座標が $x$ であることを，点 $\mathrm{P}(x)$ と表す。

さて，$a=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ として，最初 $\mathrm{P}(a)$ であったとき，2 回目にサイコロを振って初めて原点に移動し終了するのは，次の場合である。

1 回目に $a$ 以外の目 $l$ が出て $\mathrm{P}(a-l)$ に移動し，2 回目に $a-l>0$ のときは $a-l$ の目，$a-l<0$ のときは $l-a$ の目が出る場合であり，各 $\mathrm{P}(a-l)$ に対して 1 通りずつ決まる。

よって，この確率は，$\dfrac{5}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{36}$ である。

(2)　(1)と同様に考えて，最初 $\mathrm{P}(a)$ であったとき，1 回目に $a$ 以外の目 $l$ が出て $\mathrm{P}(a-l)$ に移動する。

2 回目に原点に移動しないためには，$a-l>0$ のときは $a-l$ 以外の目，$a-l<0$ のときは $l-a$ 以外の目が出る場合であり，各 $\mathrm{P}(a-l)$ に対して 5 通りずつとなる。そして，このとき $\mathrm{P}(b)$ に移動したとする。

3 回目は，$b>0$ のときは $b$ の目，$b<0$ のときは $-b$ の目が出て，初めて原点に移動し終了する。

よって，この確率は，$\dfrac{5}{6}\times\dfrac{5}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{25}{216}$ である。

(3)　(2)と同様に，最初 $\mathrm{P}(7)$ であったときを考える。

(i)　$n=1$ のとき

1 回目で原点に移動する場合はないので，終了する確率は 0 である。

(ii)　$n\geqq 2$ のとき

$n$ 回目に原点に初めて移動し終了するのは，次の場合である。

1 回目は任意で，P の座標は 1 以上 6 以下になる。$n\geqq 3$ では 2 回目以降 $n-1$ 回目までは原点に移動しない 5 通りずつの目が出て，$n$ 回目に原点に移動するただ 1 通りの目が出る場合である。

よって，この確率は，$1\times\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-2}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-2}$ である。

なお，この値は $n=2$ のときも成立している。

### [解　説]

ポイントは，点 P の座標が $-6$ 以上 6 以下の 0 でない整数であったときにサイコロを振ると，$\dfrac{1}{6}$ の確率で原点への移動が可能であるということです。