1

解答解説のページへ

多項式 $f(x)$ について，次の条件(i), (ii), (iii)を考える。

(i) $x^4 f\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(x)$　　(ii) $f(1-x) = f(x)$　　(iii) $f(1) = 1$

このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 条件(i)を満たす多項式 $f(x)$ の次数は 4 以下であることを示せ。

(2) 条件(i), (ii), (iii)をすべて満たす多項式 $f(x)$ を求めよ。

2

解答解説のページへ

n を 2 以上の自然数とする。平面上の$\triangle \mathrm{OA_1A_2}$は$\angle \mathrm{OA_2A_1} = 90°$，$\mathrm{OA_1} = 1$，$\mathrm{A_1A_2} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$を満たすとする。$\mathrm{A_2}$から$\mathrm{OA_1}$へ垂線を下ろし，交点を$\mathrm{A_3}$とする。$\mathrm{A_3}$から$\mathrm{OA_2}$へ垂線を下ろし，交点を$\mathrm{A_4}$とする。以下同様に，$k = 4,\ 5,\ \cdots$について，$\mathrm{A}_k$から$\mathrm{OA}_{k-1}$へ垂線を下ろし，交点を$\mathrm{A}_{k+1}$として，順番に$\mathrm{A_5}$，$\mathrm{A_6}$，…を定める。$\overrightarrow{h_k} = \overrightarrow{\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}}$とおくとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$k = 1,\ 2,\ \cdots$のとき，ベクトル$\overrightarrow{h_k}$と$\overrightarrow{h_{k+1}}$の内積$\overrightarrow{h_k}\cdot\overrightarrow{h_{k+1}}$を$n$と$k$で表せ。

(2)　$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{h_k}\cdot\overrightarrow{h_{k+1}}$とおくとき，極限値$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$を求めよ。ここで，自然対数の底 e について，$e = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$であることを用いてもよい。

3

解答解説のページへ

θ を $0<\theta<\dfrac{2\pi}{3}$ の範囲にある実数とし，空間の 4 点 O, A, B, C が，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=1$ かつ $\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{COA}=\theta$ を満たすとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$\triangle\mathrm{ABC}$ の重心を G とするとき, AG と OG をそれぞれ θ で表せ。

(2)　θ を動かしたとき, O, A, B, C を頂点とする四面体の体積の最大値を求めよ。

4

解答解説のページへ

点 P が次のルール(i), (ii)に従って数直線上を移動するものとする。

(i)　1, 2, 3, 4, 5, 6 の目が同じ割合で出るサイコロを振り，出た目の数を k とする。P の座標 a について，$a>0$ ならば座標 $a-k$ の点へ移動し，$a<0$ ならば座標 $a+k$ の点へ移動する。

(ii)　原点に移動したら終了し，そうでなければ(i)を繰り返す。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　P の座標が 1, 2, …, 6 のいずれかであるとき，ちょうど 3 回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ。

(2)　P の座標が 1, 2, …, 6 のいずれかであるとき，ちょうど m 回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ。

(3)　P の座標が 8 であるとき，ちょうど n 回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

a を実数として, 2 次の正方行列 A, B を次のように定める。

$$A=\begin{pmatrix}1 & a+1\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}a & 0\\ 2 & -a\end{pmatrix}$$

このとき, $((\cos t)A+(\sin t)B)^2=O$ を満たす実数 t が存在するような a の範囲を求めよ。ただし, O は零行列とする。

6

解答解説のページへ

$k>1$ として，$f(x)=x^2+2kx$ とおく。曲線 $y=f(x)$ と円 $C: x^2+y^2=1$ の 2 つの交点のうちで，第 1 象限にあるものを P とし，第 3 象限にあるものを Q とする。点 O$(0,\ 0)$，A$(1,\ 0)$，B$(-1,\ 0)$ に対して，$\alpha=\angle\mathrm{AOP}$，$\beta=\angle\mathrm{BOQ}$ とおくとき，以下の問いに答えよ。

(1) k を α で表せ。

(2) 曲線 $y=f(x)$ と円 C で囲まれる 2 つの図形のうちで，$y=f(x)$ の上側にあるものの面積 $S(k)$ を α と β で表せ。

(3) $\displaystyle\lim_{k\to\infty}S(k)$ を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$f(x)$をn次式とすると，$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\ (a_n\neq 0)$とかけ，

$$x^4f\left(\frac{1}{x}\right)=x^4\left(\frac{a_n}{x^n}+\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\cdots+\frac{a_1}{x}+a_0\right)=a_0x^4+a_1x^3+\cdots+a_nx^{4-n}$$

条件(i)より，$x^4f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)$なので，$4-n\geqq 0$，すなわち$n\leqq 4$となる。

よって，$f(x)$の次数は4以下である。

(2)　(1)より，$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$とおくと，

$$x^4f\left(\frac{1}{x}\right)=x^4\left(\frac{a}{x^4}+\frac{b}{x^3}+\frac{c}{x^2}+\frac{d}{x}+e\right)=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4$$

条件(i)より，$x^4f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)$なので，

$$ex^4+dx^3+cx^2+bx+a=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$$

よって，$a=e$，$b=d$ ………①

これより，$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+bx+a$となる。

さらに，条件(iii)より$f(1)=1$なので，$2a+2b+c=1$ ………②

また，条件(ii)より，$f(1-x)=f(x)$に$x=0$を代入すると，①と合わせて，

$$f(1)=f(0),\ a=1\ \cdots\cdots\cdots ③$$

さらに，条件(ii)に$x=-1$を代入すると，$f(2)=f(-1)$より，

$$16a+8b+4c+2b+a=a-b+c-b+a,\ 5a+4b+c=0\ \cdots\cdots\cdots ④$$

②③④より，$b=-2$，$c=3$となり，①から，

$$a=1,\ b=-2,\ c=3,\ d=-2,\ e=1$$

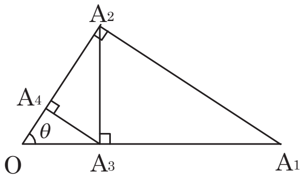
このとき，$f(x)=x^4-2x^3+3x^2-2x+1$となり，条件(i)(ii)(iii)をすべて満たす。

［解 説］

(2)において，条件(ii)は計算が難なので，数値代入で係数を決めています。なお，文系では，(2)のみの出題でした。

2

問題のページへ



(1)　$\angle \mathrm{A_1OA_2}=\theta$ とおくと，$\sin\theta=\dfrac{\mathrm{A_1A_2}}{\mathrm{OA_1}}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ より，

$\cos\theta=\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}$ となり，

$$\mathrm{A}_{k+1}\mathrm{A}_{k+2}=\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}\cos\theta=\sqrt{1-\frac{1}{n}}\,\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}$$

よって，$\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}\right)^{k-1}$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{A}_{k+1}\mathrm{A}_{k+2}}$ のなす角は，$180°-\theta$ より，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{h_k}\cdot\overrightarrow{h_{k+1}}&=\overrightarrow{\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A}_{k+1}\mathrm{A}_{k+2}}\\&=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)^{k}\cos(180°-\theta)\\&=\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-1}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{n}}\cdot\left(-\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)=-\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k}\end{aligned}$$

(2)　(1)より，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{h_k}\cdot\overrightarrow{h_{k+1}}=\dfrac{-\dfrac{1}{n}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left\{1-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}}{1-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)}=-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left\{1-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$

さて，$e=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ より，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)}=\frac{1}{e}\end{aligned}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=-\left(1-\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}-1$

［解 説］

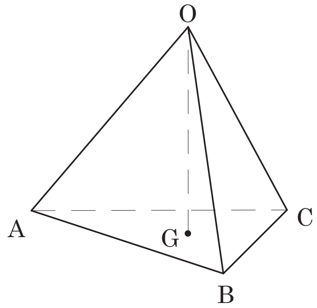
数列の極限についての基本問題です。相似な図形と等比数列が融合した構図となっています。文系の類題は，出題範囲上，極限計算なしでした。

3

問題のページへ

(1)　条件より，$OA = OB = OC = 1$，$\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = \theta$ なので，

$$AB = BC = CA = 2\sin\frac{\theta}{2}$$



これより，$\triangle ABC$ は正三角形となり，その重心 G に対して，

$$AG = \frac{2}{3}\cdot AB\sin\frac{\pi}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\theta}{2}$$

また, OG は平面 ABC に垂直となり,

$$OG = \sqrt{OA^2 - AG^2} = \sqrt{1 - \frac{4}{3}\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

(2)　まず，$\triangle ABC = \frac{1}{2}\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}\sin^2\frac{\theta}{2}$ となる。

四面体 OABC の体積を V とすると，

$$V = \frac{1}{3}\triangle ABC\cdot OG = \frac{\sqrt{3}}{3}\sin^2\frac{\theta}{2}\sqrt{1 - \frac{4}{3}\sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{3}\sqrt{3\sin^4\frac{\theta}{2} - 4\sin^6\frac{\theta}{2}}$$

さて，$x = \sin^2\frac{\theta}{2}$，$f(x) = 3x^2 - 4x^3$ とおくと，$0 < \theta < \frac{2\pi}{3}$ より $0 < x < \frac{3}{4}$ となり，

$$V = \frac{1}{3}\sqrt{f(x)}$$

すると，$f'(x) = 6x - 12x^2 = 6x(1-2x)$ から，$f(x)$ の増減は右表のようになり，$x = \frac{1}{2}$ のとき最大値 $\frac{1}{4}$ をとる。

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	

よって, V の最大値は $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{6}$ である。

［解 説］

底面の $\triangle ABC$ が正三角形となるので，この点を利用すると，計算量が少なくてすみます。

4

問題のページへ

(1)　まず，点Pの座標がxであることを，点$P(x)$と表す。

さて，$a=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$として，最初$P(a)$であったとき，3回目にサイコロを振って初めて原点に移動し終了するのは，次の場合である。

まず，1回目に原点に移動しないa以外の目lが出て$P(a-l)$に移動し，2回目に$a-l>0$のときは$a-l$以外の目，$a-l<0$のときは$l-a$以外の目が出る場合である。そして，このとき$P(b)$に移動したとする。

3回目は，$b>0$のときはbの目，$b<0$のときは$-b$の目が出て，初めて原点に移動し終了する。

よって，この確率は，$\dfrac{5}{6}\times\dfrac{5}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{25}{216}$である。

(2)　(1)と同様に考えて，m回サイコロを振って原点で終了するのは，1回目から$m-1$回目（$m\geqq 2$）までは原点に移動しない5通りずつの目が出て，m回目に原点に移動するただ1通りの目が出る場合である。

すると，この確率は，$\left(\dfrac{5}{6}\right)^{m-1}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{m-1}$である。

なお，この値は$m=1$の場合も成立している。

(3)　(2)と同様に，最初$P(8)$であったときを考える。

(i)　$n=1$のとき

1回目で原点に移動する場合はないので，終了する確率は0である。

(ii)　$n=2$のとき

1回目は1以外の目が出て，Pの座標が2以上6以下になり，2回目に原点に移動するただ1通りの目が出る場合である。

すると，この確率は，$\dfrac{5}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{36}$である。

(iii)　$n\geqq 3$のとき

まず，2回目で原点に移動しない。このとき，Pの座標は-4以上6以下になっている。次に，3回目以降$n-1$回目（$n\geqq 4$）までは原点に移動しない5通りずつの目が出て，n回目に原点に移動するただ1通りの目が出る場合である。

よって，この確率は，$\left(1-\dfrac{5}{36}\right)\times\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-3}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{31}{216}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-3}$である。

なお，この値は$n=3$のときも成立している。

［解　説］

ポイントは，点Pの座標が-6以上6以下の0でない整数であったときにサイコロを振ると，$\dfrac{1}{6}$の確率で原点への移動が可能であるということです。

$\boxed{5}$

問題のページへ

$A=\begin{pmatrix}1 & a+1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}a & 0\\ 2 & -a\end{pmatrix}$に対し，$E$を単位行列とすると，

$$A^2-E=O,\ B^2-a^2E=O$$

よって，$A^2=E\cdots\cdots①$，$B^2=a^2E\cdots\cdots②$であり，

$$AB+BA=\begin{pmatrix}3a+2 & -a^2-a\\ -2 & a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a & a^2+a\\ 2 & 3a+2\end{pmatrix}=(4a+2)E\cdots\cdots\cdots③$$

さて，条件から，$((\cos t)A+(\sin t)B)^2=O$なので，

$$(\cos^2 t)A^2+(\cos t\sin t)(AB+BA)+(\sin^2 t)B^2=O$$

①②③より，$(\cos^2 t+(4a+2)\cos t\sin t+a^2\sin^2 t)E=O$となり，

$$\cos^2 t+(4a+2)\cos t\sin t+a^2\sin^2 t=0\cdots\cdots\cdots④$$

以下，④を満たす実数tが存在するaの条件を求める。

④より，$\dfrac{1+\cos 2t}{2}+(4a+2)\dfrac{\sin 2t}{2}+a^2\cdot\dfrac{1-\cos 2t}{2}=0$

$$(4a+2)\sin 2t+(1-a^2)\cos 2t=-a^2-1$$

ここで，$\cos\alpha=\dfrac{4a+2}{\sqrt{(4a+2)^2+(1-a^2)^2}}$，$\sin\alpha=\dfrac{1-a^2}{\sqrt{(4a+2)^2+(1-a^2)^2}}$とおくと，

$$\sqrt{(4a+2)^2+(1-a^2)^2}\sin(2t+\alpha)=-a^2-1\cdots\cdots\cdots⑤$$

⑤を満たすtが存在する条件は，

$$\sqrt{(4a+2)^2+(1-a^2)^2}\geqq|-a^2-1|,\ (4a+2)^2+(1-a^2)^2\geqq(-a^2-1)^2$$

まとめると，$3a^2+4a+1\geqq 0$，$(3a+1)(a+1)\geqq 0$となり，求める条件は，

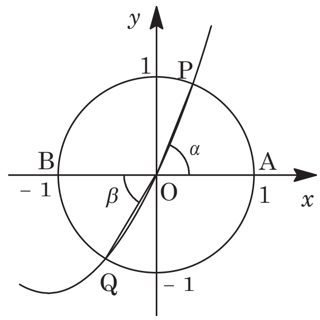
$$a\leqq -1,\ -\frac{1}{3}\leqq a$$

[解 説]

行列の問題という形式をとっていますが，実質的には，三角関数の式変形の問題となっています。

6

問題のページへ



(1)　$f(x)=x^2+2kx$ に対し，点 $\mathrm{P}(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ が曲線 $y=f(x)$ 上にあるので，

$$\sin\alpha=\cos^2\alpha+2k\cos\alpha$$

よって，$k=\dfrac{\sin\alpha-\cos^2\alpha}{2\cos\alpha}=\dfrac{1}{2}(\tan\alpha-\cos\alpha)$

(2)　まず，弧 PQ に対する扇形の面積 S_1 は，

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha+\frac{\pi}{2}+\beta\right)=\frac{1}{2}(\pi-\alpha+\beta)$$

また，線分 OP : $y=x\tan\alpha$ と曲線 $y=f(x)$ に囲まれた部分の面積 S_2 は，

$$S_2=\int_0^{\cos\alpha}\{x\tan\alpha-f(x)\}dx=\int_0^{\cos\alpha}-x(x-\cos\alpha)dx=\frac{1}{6}\cos^3\alpha$$

同様にして，$\mathrm{Q}(-\cos\beta,\ -\sin\beta)$ から，線分 OQ : $y=x\tan\beta$ と曲線 $y=f(x)$ に囲まれた部分の面積 S_3 は，

$$S_3=\int_{-\cos\beta}^{0}\{x\tan\beta-f(x)\}dx=\int_{-\cos\beta}^{0}-x(x+\cos\beta)dx=\frac{1}{6}\cos^3\beta$$

よって，$S(k)=S_1+S_2+S_3=\dfrac{1}{2}(\pi-\alpha+\beta)+\dfrac{1}{6}(\cos^3\alpha+\cos^3\beta)$

(3)　まず，(1)より，$k+\dfrac{1}{2}\cos\alpha=\dfrac{1}{2}\tan\alpha$ であり，$|\cos\alpha|\leqq1$ より，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ において，$k\to\infty$ のとき $\alpha\to\dfrac{\pi}{2}$ である。

また，点 $\mathrm{Q}(-\cos\beta,\ -\sin\beta)$ が曲線 $y=f(x)$ 上にあるので，

$$-\sin\beta=\cos^2\beta-2k\cos\beta$$

よって，$k=\dfrac{\sin\beta+\cos^2\beta}{2\cos\beta}=\dfrac{1}{2}(\tan\beta+\cos\beta)$ より，$k-\dfrac{1}{2}\cos\beta=\dfrac{1}{2}\tan\beta$

すると，同様にして，$k\to\infty$ のとき $\beta\to\dfrac{\pi}{2}$ である。

以上より，$\displaystyle\lim_{k\to\infty}S(k)=\lim_{k\to\infty}\left\{\frac{1}{2}(\pi-\alpha+\beta)+\frac{1}{6}(\cos^3\alpha+\cos^3\beta)\right\}=\frac{1}{2}\pi$

［解　説］

計算量も適度な，微積分の総合問題です。なお，(3)の結論は，図からの予測と一致するものです。