1

解答解説のページへ

すべての実数 x に対して不等式 $2^{2x+2}+2^{x}a+1-a>0$ が成り立つような実数 a の範囲を求めよ。

2

解答解説のページへ

辺 AB の長さが 1，∠A が直角となる三角形△ABC がある。辺 BC 上を点 C から点 B まで動く点 D を考え，内積 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を t とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　t の動く範囲を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ が成り立つとき，t の値を求めよ。

3

解答解説のページへ

袋の中に青玉が 7 個, 赤玉が 3 個入っている。袋から 1 回につき 1 個ずつ玉を取り出す。一度取り出した玉は袋に戻さないとして, 以下の問いに答えよ。

(1) 4 回目に初めて赤玉が取り出される確率を求めよ。

(2) 8 回目が終わった時点で赤玉がすべて取り出されている確率を求めよ。

(3) 赤玉がちょうど 8 回目ですべて取り出される確率を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

不等式$2y > x+1+3|x-1|$が表す座標平面上の領域を D とする。実数 a に対して，放物線 C を $y = x^2 - 2ax + a^2 + a + 2$ で定める。このとき，C 上の点がすべて D の点となるような a の範囲を求めよ。

$\boxed{1}$

問題のページへ

不等式 $2^{2x+2}+2^x a+1-a>0$ に対して，$2^x=t>0$ とおくと，

$$4t^2+at+1-a>0,\ 4\left(t+\frac{a}{8}\right)^2-\frac{1}{16}a^2-a+1>0\cdots\cdots\cdots(*)$$

すべての $t>0$ に対して, $(*)$が成立する条件は,

(i)　$-\frac{a}{8}>0\ (a<0)$ のとき

$-\frac{1}{16}a^2-a+1>0$ より，$a^2+16a-16<0$ となり, $a<0$ から,

$$-8-4\sqrt{5}<a<0$$

(ii)　$-\frac{a}{8}\leqq 0\ (a\geqq 0)$ のとき

$1-a\geqq 0$ より，$a\leqq 1$ となり, $a\geqq 0$ から,

$$0\leqq a\leqq 1$$

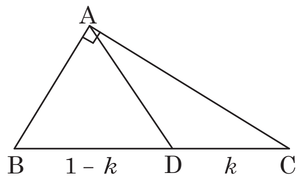
(i)(ii)より，$-8-4\sqrt{5}<a\leqq 1$

［解 説］

2 次不等式の成立条件を，軸の位置で場合分けをするタイプの基本題です。

$\boxed{2}$

問題のページへ



(1)　BD : DC $= 1-k : k$ $(0 \leqq k \leqq 1)$ とおくと,

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = k\overrightarrow{\mathrm{AB}} + (1-k)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

条件より，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 1$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$ なので,

$$t = \overrightarrow{\mathrm{AD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \left(k\overrightarrow{\mathrm{AB}} + (1-k)\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}$$
$$= k|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 + (1-k)\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = k$$

よって，$0 \leqq k \leqq 1$ から，$0 \leqq t \leqq 1$ である。

(2)　(1)より $k = t$ なので，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = t\overrightarrow{\mathrm{AB}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

条件より，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA}}$ から,

$$\left(t\overrightarrow{\mathrm{AB}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = t(\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}) \cdot (-\overrightarrow{\mathrm{AC}}),\ (1-t)|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 = t|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2$$

よって，$1-t = t$ より，$t = \dfrac{1}{2}$

［解 説］

ベクトルの平面図形への応用の基本題です。ベクトルの始点を A とすることは，問題文から読み取れます。

3

問題のページへ

(1)　4 回目に初めて赤玉が取り出されるのは，青→青→青→赤から，その確率は，

$$\frac{{}_7\mathrm{P}_3\times 3}{{}_{10}\mathrm{P}_4}=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 3}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}=\frac{1}{8}$$

(2)　8 回目が終わった時点で赤玉がすべて取り出される，すなわち赤玉 3 個，青玉 5 個が取り出される確率は，

$$\frac{{}_8\mathrm{C}_3\times 3!\times {}_7\mathrm{P}_5}{{}_{10}\mathrm{P}_8}=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}=\frac{7}{15}$$

(3)　7 回目が終わった時点で赤玉がすべて取り出される，すなわち赤玉 3 個，青玉 4 個が取り出される確率は，

$$\frac{{}_7\mathrm{C}_3\times 3!\times {}_7\mathrm{P}_4}{{}_{10}\mathrm{P}_7}=\frac{7\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}=\frac{7}{24}$$

すると，赤玉がちょうど 8 回目ですべて取り出される確率は, (2)から,

$$\frac{7}{15}-\frac{7}{24}=\frac{7}{40}$$

［解 説］

順列を同様に確からしいとしています。なお, (3)は(2)を利用した方法です。

$\boxed{4}$

問題のページへ

放物線 $C: y=x^2-2ax+a^2+a+2$，領域 $D: 2y>x+1+3|x-1|$ に対して，C 上の点がすべて D の点となる条件は，すべての x について，

$$2(x^2-2ax+a^2+a+2)>x+1+3|x-1|\cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$より，$x\geqq 1$ において，$2(x^2-2ax+a^2+a+2)>x+1+3(x-1)$

$$x^2-2(a+1)x+a^2+a+3>0,\ \{x-(a+1)\}^2-a+2>0\cdots\cdots\cdots①$$

$(*)$より，$x<1$ において，$2(x^2-2ax+a^2+a+2)>x+1-3(x-1)$

$$x^2-(2a-1)x+a^2+a>0,\ \left(x-\frac{2a-1}{2}\right)^2+2a-\frac{1}{4}>0\cdots\cdots\cdots②$$

さて，$x\geqq 1$ において，①が成立する条件は，

(i)　$a+1\geqq 1\ (a\geqq 0)$ のとき

$-a+2>0$ から，$a<2$ となり，$0\leqq a<2$

(ii)　$a+1<1\ (a<0)$ のとき

$1-2(a+1)+a^2+a+3>0$，$a^2-a+2>0$ となり，つねに成立するので，$a<0$

(i)(ii)より，$a<2\cdots\cdots\cdots③$

次に，$x<1$ において，②が成立する条件は，

(iii)　$\dfrac{2a-1}{2}\geqq 1\ \left(a\geqq\dfrac{3}{2}\right)$ のとき

$1-(2a-1)+a^2+a\geqq 0$，$a^2-a+2\geqq 0$ となり，つねに成立するので，$a\geqq\dfrac{3}{2}$

(iv)　$\dfrac{2a-1}{2}<1\ \left(a<\dfrac{3}{2}\right)$ のとき

$2a-\dfrac{1}{4}>0$ から，$a>\dfrac{1}{8}$ となり，$\dfrac{1}{8}<a<\dfrac{3}{2}$

(iii)(iv)より，$a>\dfrac{1}{8}\cdots\cdots\cdots④$

以上より，すべての x について$(*)$が成立する条件は，③④から $\dfrac{1}{8}<a<2$ である。

［解　説］

数式的な処理で押し通すと，第 1 問と同じ内容になります。