1

解答解説のページへ

$a,\ b,\ c$ を実数とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$a+b=c$ であるとき，$a^3+b^3+3abc=c^3$ が成り立つことを示せ。

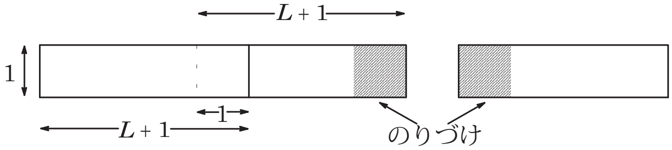
(2)　$a+b\geqq c$ であるとき，$a^3+b^3+3abc\geqq c^3$ が成り立つことを示せ。

2

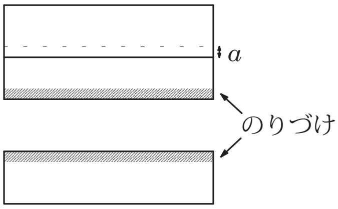
解答解説のページへ

L を 2 以上の自然数，a を $0<a<1$ を満たす実数とする。縦 1 cm，横 $(L+1)$ cm の長方形の紙を用いて，次のように長方形 A, B を作る。

長方形 A の作り方。L 枚の紙を横に並べて，順に 1 辺 1 cm の正方形をのりしろとして（隣り合う紙が横 1 cm 重なるように）はり合わせ，縦 1 cm の横長の長方形を作る。



長方形 B の作り方。L 枚の紙を縦に並べて，隣り合う紙が縦 $a$cm 重なるようにはり合わせて，横 $(L+1)$ cm の長方形を作る。



長方形 A, B の面積をそれぞれ S_1 cm^2 および S_2 cm^2 とおくとき，以下の問いに答えよ。

(1)　S_1 と S_2 を求めよ。

(2)　$L=2$ のとき，$S_1-1<S_2$ となる a の範囲を求めよ。

(3)　$S_1-1<S_2$ となる 2 以上の自然数 L があるような a の範囲を求めよ。

3

解答解説のページへ

袋の中に青玉が 7 個，赤玉が 3 個入っている。袋から 1 回につき 1 個ずつ玉を取り出す。一度取り出した玉は袋に戻さないとして，以下の問いに答えよ。

(1)　4 回目に初めて赤玉が取り出される確率を求めよ。

(2)　8 回目が終わった時点で赤玉がすべて取り出されている確率を求めよ。

(3)　赤玉がちょうど 8 回目ですべて取り出される確率を求めよ。

(4)　4 回目が終わった時点で取り出されている赤玉の個数の期待値を求めよ。

4

解答解説のページへ

a を $0 \leqq a \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数とする。以下の問いに答えよ。

(1) 実数 θ に対して $\sin\theta$ と $\sin(\theta-2a)$ のうち小さくないほうを $f(\theta)$ とおく。すなわち,

$\sin\theta \geqq \sin(\theta-2a)$ のとき $f(\theta)=\sin\theta$

$\sin\theta < \sin(\theta-2a)$ のとき $f(\theta)=\sin(\theta-2a)$

となる関数 $f(\theta)$ を考える。このとき定積分 $I=\displaystyle\int_0^{\pi} f(\theta)\,d\theta$ を求めよ。

(2) a を $0 \leqq a \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で動かすとき, (1)の I の最大値を求めよ。

5

解答解説のページへ

$a,\ b,\ c,\ d,\ p,\ q$ は $ad-bc>0$，$p>0,\ q>0$ を満たす実数とする。2 つの行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と $P=\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$ が $APA=P^2$ を満たすとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$P^3A=AP^3$ が成り立つことを示せ。

(2)　A を p と q で表せ。

6

解答解説のページへ

実数 a に対して，x の方程式 $|x(x-2)|+2a|x|-4a|x-2|-1=0$ が，相異なる 4 つの実数解をもつような a の範囲を求めよ。

1

問題のページへ

(1) $a^3+b^3-c^3+3abc=(a+b-c)(a^2+b^2+c^2-ab+bc+ca)$ ………①

すると，$a+b=c$ のとき，①から，$a^3+b^3+3abc=c^3$ が成り立つ。

(2) $a^2+b^2+c^2-ab+bc+ca=\dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}\geqq 0$ ………②

すると，$a+b\geqq c$ のとき，①②から，$a^3+b^3+3abc\geqq c^3$ が成り立つ。
なお，等号成立は，$a+b=c$ または $a=b=-c$ のときである。

［解 説］

有名な等式①と不等式②の知識を確認する問題です。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1) のりしろの部分を差し引いた $L-1$ 枚ともとの 1 枚の和で考えると,

$$S_1=\{L(L-1)+(L+1)\}\times 1=L^2+1$$

$$S_2=\{(1-a)(L-1)+1\}\times(L+1)=(1-a)L^2+L+a$$

(2) $L=2$ のとき，$S_1=5$，$S_2=4(1-a)+2+a=-3a+6$ となり，$S_1-1<S_2$ より，

$$4<-3a+6,\ 3a<2$$

$0<a<1$ より，$0<a<\dfrac{2}{3}$

(3) $S_1-1<S_2$ より，$L^2<(1-a)L^2+L+a$，$aL^2-L-a<0$

ここで，$f(L)=aL^2-L-a$ とおくと，$f(L)<0$ となる 2 以上の自然数 L が存在する条件は, $0<a<1$，$f(0)=-a<0$ に注意すると，$f(2)=3a-2<0$ であり,

$$0<a<\frac{2}{3}$$

［解 説］

仰々しい設定の問題ですが, 内容は基本的です。

3

問題のページへ

(1)　4 回目に初めて赤玉が取り出されるのは，青→青→青→赤から，その確率は，

$$\frac{{}_7P_3\times 3}{{}_{10}P_4}=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 3}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}=\frac{1}{8}$$

(2)　8 回目が終わった時点で赤玉がすべて取り出される，すなわち赤玉 3 個，青玉 5 個が取り出される確率は，

$$\frac{{}_8C_3\times 3!\times {}_7P_5}{{}_{10}P_8}=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}=\frac{7}{15}$$

(3)　7 回目が終わった時点で赤玉がすべて取り出される，すなわち赤玉 3 個，青玉 4 個が取り出される確率は，

$$\frac{{}_7C_3\times 3!\times {}_7P_4}{{}_{10}P_7}=\frac{7\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}=\frac{7}{24}$$

すると，赤玉がちょうど 8 回目ですべて取り出される確率は, (2)から，

$$\frac{7}{15}-\frac{7}{24}=\frac{7}{40}$$

(4)　4 回目が終わった時点で取り出されている赤玉の個数は，

(i)　0 個のとき　この場合の確率は，$\frac{{}_7P_4}{{}_{10}P_4}=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}=\frac{1}{6}$

(ii)　1 個のとき　この場合の確率は，$\frac{{}_4C_1\times {}_3P_1\times {}_7P_3}{{}_{10}P_4}=\frac{4\cdot 3\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}=\frac{1}{2}$

(iii) 2 個のとき　この場合の確率は，$\frac{{}_4C_2\times {}_3P_2\times {}_7P_2}{{}_{10}P_4}=\frac{6\cdot 3\cdot 2\cdot 7\cdot 6}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}=\frac{3}{10}$

(iv) 3 個のとき　この場合の確率は，$\frac{{}_4C_3\times {}_3P_3\times {}_7P_1}{{}_{10}P_4}=\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 7}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}=\frac{1}{30}$

(i)～(iv)より，赤玉の個数の期待値は

$$0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{30}=\frac{6}{5}$$

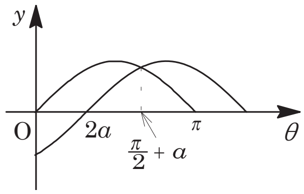
［解 説］

順列を同様に確からしいとしています。なお，(3)は(2)を利用した方法です。また，(3)までは文理共通です。

4

問題のページへ

(1)　$0 < a \leqq \dfrac{\pi}{2}$，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ において，$\sin\theta = \sin(\theta - 2a)$ とおくと，



$$\theta = \pi - (\theta - 2a),\quad \theta = \frac{\pi}{2} + a$$

すると，$f(\theta)$ は $\sin\theta$ と $\sin(\theta - 2a)$ のうち小さくない方より，

$$f(\theta) = \sin\theta\ \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2} + a\right),\quad f(\theta) = \sin(\theta - 2a)\ \left(\frac{\pi}{2} + a \leqq \theta \leqq \pi\right)$$

これは $a = 0$ のときも満たしている。

さて，$I = \displaystyle\int_0^{\pi} f(\theta)\,d\theta$ から，

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}+a} \sin\theta\,d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}+a}^{\pi} \sin(\theta - 2a)\,d\theta = -\Big[\cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}+a} - \Big[\cos(\theta - 2a)\Big]_{\frac{\pi}{2}+a}^{\pi}$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) + 1 - \cos(\pi - 2a) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos 2a + 2\sin a + 1$$

(2)　(1)より，$I = 1 - 2\sin^2 a + 2\sin a + 1 = -2\left(\sin a - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{5}{2}$

よって，$\sin a = \dfrac{1}{2}\ \left(a = \dfrac{\pi}{6}\right)$ のとき，I は最大値 $\dfrac{5}{2}$ をとる。

［解 説］

定積分の計算問題です。(2)で，最大値を求めるのに，微分をするまでもありませんでした。

$\boxed{5}$ 問題のページへ

(1) 条件より，$APA = P^2$ ……①なので，

$$P^3A = P^2 \cdot PA = APAPA = AP \cdot P^2 = AP^3 \text{ ………②}$$

(2) $P = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$ より，$P^3 = \begin{pmatrix} p^3 & 0 \\ 0 & q^3 \end{pmatrix}$ となり，②から，

$$\begin{pmatrix} p^3 & 0 \\ 0 & q^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p^3 & 0 \\ 0 & q^3 \end{pmatrix}$$

$ap^3 = ap^3$ ……③，$bp^3 = bq^3$ ……④，$cq^3 = cp^3$ ……⑤，$dq^3 = dq^3$ ……⑥

すると，③⑥は成立し，④より $b(p^3 - q^3) = 0$，⑤より $c(p^3 - q^3) = 0$

(i) $p = q$ のとき　④⑤も成立し，①より，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^2 & 0 \\ 0 & p^2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$a^2 + bc = p$ ………⑦，$b(a+d) = 0$ ………⑧

$c(a+d) = 0$ ………⑨，$bc + d^2 = p$ ………⑩

$a + d = 0$ のとき，⑦に代入すると，$p = -ad + bc < 0$ となり条件に反する。

$a + d \neq 0$ のとき，⑧⑨より $b = c = 0$ となり，⑦⑩より，$a^2 = d^2 = p$

すると，$a + d \neq 0$ から，$a = d = \pm\sqrt{p}$

(ii) $p \neq q$ のとき　④⑤から $b = c = 0$ となり，①より，

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^2 & 0 \\ 0 & q^2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a^2p & 0 \\ 0 & d^2q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^2 & 0 \\ 0 & q^2 \end{pmatrix}$$

$a^2p = p^2$ ………⑪，$d^2q = q^2$ ………⑫

⑪⑫より，$a^2 = p$，$d^2 = q$ となり，$ad - bc = ad > 0$ から，

$a = \pm\sqrt{p}$，$d = \pm\sqrt{q}$（複号同順）

(i)(ii)より，$b = c = 0$，$a = \pm\sqrt{p}$，$d = \pm\sqrt{q}$（複号同順）となり，

$$A = \pm\begin{pmatrix} \sqrt{p} & 0 \\ 0 & \sqrt{q} \end{pmatrix}$$

［解 説］

扱いやすい②で解の候補を絞り，①で確認するという構図になっています。なお，計算量は見かけほどではありません。

6　問題のページへ

方程式$|x(x-2)|+2a|x|-4a|x-2|-1=0$ ……①に対して，

$$2a(2|x-2|-|x|)=|x(x-2)|-1$$

ここで，$2|x-2|-|x|=0$とすると，$2(x-2)=\pm x$から，$x=4,\ \frac{4}{3}$である。

$x=4$のとき$|x(x-2)|-1=7$，$x=\frac{4}{3}$のとき$|x(x-2)|-1=-\frac{1}{9}$となり，ともに①は成立しない。よって，$2|x-2|-|x|\neq 0$より，①は，

$$a=\frac{|x(x-2)|-1}{2(2|x-2|-|x|)}\ \cdots\cdots\cdots②$$

さて，②の右辺を，$f(x)=\dfrac{|x(x-2)|-1}{2(2|x-2|-|x|)}$とおくと，

(i)　$x\leqq 0$のとき

$$f(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{x(x-2)-1}{-2(x-2)+x}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2-2x-1}{x-4}$$

$$f'(x)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-2)(x-4)-(x^2-2x-1)}{(x-4)^2}$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2-8x+9}{(x-4)^2}$$

これより，$f(x)$の増減は右表のようになる。

x	$-\infty$	$\cdots$	0
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	∞	↘	$-\frac{1}{8}$

(ii)　$0\leqq x\leqq 2$のとき

$$f(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{-x(x-2)-1}{-2(x-2)-x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{-x^2+2x-1}{-3x+4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-1)^2}{3x-4}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2(x-1)(3x-4)-(x-1)^2\cdot 3}{(3x-4)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-1)(3x-5)}{(3x-4)^2}$$

$$\lim_{x\to\frac{4}{3}-0}f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{4}{3}+0}f(x)=\infty$$

これより，$f(x)$の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\times$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\frac{1}{8}$	↗	0	↘	$\times$	↘	$\frac{2}{9}$	↗	$\frac{1}{4}$

(iii)　$x\geqq 2$のとき

$$f(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{x(x-2)-1}{2(x-2)-x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2-2x-1}{x-4},\quad f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2-8x+9}{(x-4)^2}$$

$$\lim_{x\to 4-0}f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to 4+0}f(x)=\infty$$

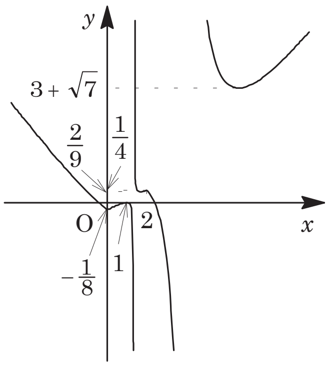
これより，$f(x)$の増減は右表のようになる。

x	2	$\cdots$	4	$\cdots$	$4+\sqrt{7}$	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$-$	$\times$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	↘	$\times$	↘	$3+\sqrt{7}$	↗	∞

(i)〜(iii)より，$y=f(x)$ のグラフの概形を図示すると，右図のようになる。

そこで，方程式②すなわち $a=f(x)$ が相異なる 4 つの実数解をもつ条件は，直線 $y=a$ と $y=f(x)$ のグラフが 4 つの共有点をもつ条件と等しいことより，求める a の範囲は，

$$-\frac{1}{8}<a<0,\ \frac{2}{9}<a<\frac{1}{4},\ 3+\sqrt{7}<a$$



[解 説]

定数分離した後の計算量は，通常の量とはいえません。グラフもかなりデフォルメして描いていますが，それでも上のような表現力しかありません。