1

解答解説のページへ

$f(x)=x^3$ とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$0 \leqq a < x < y$ を満たすすべての $a,\ x,\ y$ に対して

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} < \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

が成り立つことを示せ。

(2)　$y < x < b$ を満たすすべての $x,\ y$ に対して

$$f(x) > \frac{(x-y)f(b)+(b-x)f(y)}{b-y}$$

が成り立つような b の範囲を求めよ。

2

解答解説のページへ

放物線$C : y = x^2$に対して，以下の問い に答えよ。

(1)　C 上の点$\mathrm{P}(a,\ a^2)$を通り，P における C の接線に直交する直線 l の方程式を求めよ。

(2)　l を(1)で求めた直線とする。$a \neq 0$のとき，直線$x = a$を l に関して対称に折り返して得られる直線 m の方程式を求めよ。

(3)　(2)で求めた直線 m は a の値によらず定点 F を通ることを示し，F の座標を求めよ。

3

解答解説のページへ

数直線上を動く点 P がある。裏表の出る確率が等しい硬貨を 2 枚投げて，2 枚とも表が出たら P は正の向きに 1 だけ移動し，2 枚とも裏が出たら P は負の向きに 1 だけ移動し，それ以外のときはその位置にとどまるものとする。P が原点 O を出発点として，このような試行を n 回繰り返して到着した位置を S_n とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$S_2=-1$ となる確率を求めよ。

(2)　$S_3=1$ となる確率を求めよ。

(3)　試行を n 回繰り返して出た表の総数を i とするとき，S_n を求めよ。

(4)　k を整数とするとき，$S_n=k$ となる確率を求めよ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

四面体 ABCD において，辺 AB の中点を M，辺 CD の中点を N とする。以下の問いに答えよ。

(1)　等式 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}$ を満たす点 P は存在するか。証明をつけて答えよ。

(2)　点 Q が等式 $|\overrightarrow{\mathrm{QA}}+\overrightarrow{\mathrm{QB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{QC}}+\overrightarrow{\mathrm{QD}}|$ を満たしながら動くとき，点 Q が描く図形を求めよ。

(3)　点 R が等式 $|\overrightarrow{\mathrm{RA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{RB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{RC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{RD}}|^2$ を満たしながら動くとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MR}}$ は R のとり方によらず一定であることを示せ。

(4)　(2)の点 Q が描く図形と(3)の点 R が描く図形が一致するための必要十分条件は $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|$ であることを示せ。

1

問題のページへ

(1) $0 \leqq a < x < y$ を満たすすべての a, x, y に対して,

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}-\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{y^3-x^3}{y-x}-\frac{x^3-a^3}{x-a}$$

$$=(y^2+xy+x^2)-(x^2+ax+a^2)=(y^2-a^2)+x(y-a)$$

$$=(y-a)(y+a+x)>0$$

よって, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}<\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$

(2) $y<x<b$ を満たすすべての x, y に対して $f(x)>\dfrac{(x-y)f(b)+(b-x)f(y)}{b-y}$ から,

$$(b-y)f(x)-(x-y)f(b)-(b-x)f(y)>0\cdots\cdots\cdots①$$

すると, ①の左辺は,

$$(b-x+x-y)f(x)-(x-y)f(b)-(b-x)f(y)$$

$$=(b-x)\{f(x)-f(y)\}+(x-y)\{f(x)-f(b)\}$$

$$=(b-x)(x^3-y^3)+(x-y)(x^3-b^3)$$

$$=(b-x)(x-y)\{(x^2+xy+y^2)-(x^2+bx+b^2)\}$$

$$=(b-x)(x-y)\{x(y-b)+(y^2-b^2)\}$$

$$=(b-x)(x-y)(y-b)(x+y+b)$$

$b-x>0$, $x-y>0$, $y-b<0$ より, ①は, $x+y+b<0\cdots\cdots\cdots②$

$y<x<b$ を満たすすべての x, y に対して, ②が成り立つ条件は,

(i) $b>0$ のとき

$y=\dfrac{b}{4}$, $x=\dfrac{b}{2}$ とすると, ②は $\dfrac{7}{4}b<0$ となり, 成立しない。

(ii) $b=0$ のとき

$y<x<0$ を満たすすべての x, y に対して, $x+y<0$ となり, ②は成立する。

(iii) $b<0$ のとき

$y<x<b$ を満たすすべての x, y に対して, 明らかに②は成立する。

(i)(ii)(iii)より, 求める b の範囲は, $b \leqq 0$ である。

［解 説］

(2)は, (1)と独立に, 計算だけで進めましたが, この問題は, $y=f(x)$ のグラフにおいて, 上に凸になっている範囲を求めるものです。

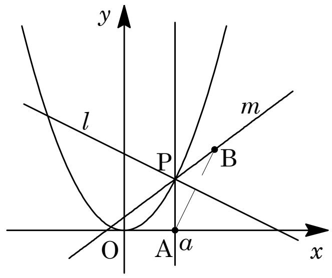
2

問題のページへ

(1)　$C: y=x^2$ に対して，$y'=2x$

これから，点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における C の接線の方向ベクトルの成分を $(1,\ 2a)$ とおくことができるので，接線に直交する直線 l の方程式は，

$$(x-a)+2a(y-a^2)=0,\quad x+2ay-a-2a^3=0$$



(2) 点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ の l に関する対称点を $\mathrm{B}(b,\ c)$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=k(1,\ 2a),\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k(1,\ 2a)$$

よって，$(b,\ c)=(a,\ 0)+k(1,\ 2a)=(a+k,\ 2ak)$ ………①

また，線分 AB の中点 $\left(\dfrac{a+b}{2},\ \dfrac{c}{2}\right)$ が l 上にあることより，

$$\frac{a+b}{2}+2a\cdot\frac{c}{2}-a-2a^3=0,\quad b+2ac-a-4a^3=0 \text{ ………②}$$

①②より，$a+k+4a^2k-a-4a^3=0$，$k=\dfrac{4a^3}{4a^2+1}$

よって，$(b,\ c)=\left(a+\dfrac{4a^3}{4a^2+1},\ \dfrac{8a^4}{4a^2+1}\right)$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\left(a+\frac{4a^3}{4a^2+1}-a,\ \frac{8a^4}{4a^2+1}-a^2\right)=\frac{a^2}{4a^2+1}(4a,\ 4a^2-1)$$

$a\neq 0$ のとき, 2 点 P, B を通る直線 m の方程式は,

$$y-a^2=\frac{4a^2-1}{4a}(x-a),\quad y=\frac{4a^2-1}{4a}x+\frac{1}{4}$$

(3)　a の値によらず直線 m が通る定点 F の座標は, (2)より，$\mathrm{F}\left(0,\ \dfrac{1}{4}\right)$ である。

［解 説］

図形と方程式についての基本題です。ただ, (3)については，定点が 2 点以上存在する可能性はないので, 1 点を見つけて終了としています。

3

問題のページへ

(1)　硬貨を 2 枚投げて，点 P が正の向きに 1 だけ移動する事象を A, 負の向きに 1 だけ移動する事象を B, その位置にとどまる事象を C とすると，条件より，

$$P(A)=\frac{1}{4},\ P(B)=\frac{1}{4},\ P(C)=\frac{1}{2}$$

さて，$S_2=-1$ となるのは, B と C が 1 回ずつ起こった場合より，その確率は,

$$_2\mathrm{C}_1\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

(2)　$S_3=1$ となるのは, A が 1 回, C が 2 回起こったか，または A が 2 回, B が 1 回起こった場合より，その確率は,

$$_3\mathrm{C}_1\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2+{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{15}{64}$$

(3)　試行を n 回繰り返して出た表の総数を i とし，このとき, A が p 回, B が q 回, C が $n-p-q$ 回起こったとすると,

$$2p+(n-p-q)=i,\ p-q=i-n\cdots\cdots\cdots(*)$$

一方，$S_n=1\times p+(-1)\times q=p-q$ となるので, $(*)$から，$S_n=i-n$ である。

(4)　$S_n=k$ となるのは, (3)より，$i-n=k$ から,

$$i=n+k,\ 2n-i=2n-(n+k)=n-k$$

よって，表の総数が $n+k$，裏の総数が $n-k$ の場合で，その確率は,

$$_{2n}\mathrm{C}_{n+k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}={}_{2n}\mathrm{C}_{n+k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\quad(-n\leqq k\leqq n)$$

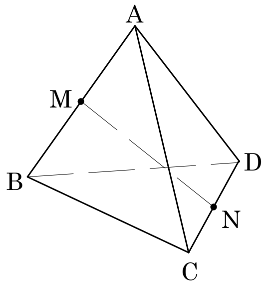
なお，$k<-n$，$n<k$ のときは，$S_n=k$ となる確率は 0 である。

［解　説］

n 回試行後の位置 S_n が，試行の回数 n と表の総数 i だけで決まってしまうという不思議な感じのする問題でした。

4

問題のページへ



(1)　$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}$ より，$\dfrac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}}{2}=\dfrac{\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}}{2}$ となり，

$$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{PN},\ \overrightarrow{PM}-\overrightarrow{PN}=\vec{0}$$

これより，$\overrightarrow{NM}=\vec{0}$ となり，題意を満たさない。

よって，点 P は存在しない。

(2)　$|\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}|=|\overrightarrow{QC}+\overrightarrow{QD}|$ から，(1)と同様にすると，

$$|\overrightarrow{QM}|=|\overrightarrow{QN}|$$

よって，点 Q は線分 MN の垂直二等分面を描く。

(3)　まず，$|\overrightarrow{RA}|^2+|\overrightarrow{RB}|^2=|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MR}|^2+|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MR}|^2$

$$=|\overrightarrow{MA}|^2+|\overrightarrow{MB}|^2+2|\overrightarrow{MR}|^2-2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MR}-2\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MR}$$
$$=2|\overrightarrow{MA}|^2+2|\overrightarrow{MR}|^2-2(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})\cdot\overrightarrow{MR}$$
$$=2|\overrightarrow{MA}|^2+2|\overrightarrow{MR}|^2$$

同様にして，$|\overrightarrow{RC}|^2+|\overrightarrow{RD}|^2=2|\overrightarrow{NC}|^2+2|\overrightarrow{NR}|^2=2|\overrightarrow{NC}|^2+2|\overrightarrow{MR}-\overrightarrow{MN}|^2$

$$=2|\overrightarrow{NC}|^2+2|\overrightarrow{MR}|^2-4\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MR}+2|\overrightarrow{MN}|^2$$

すると，$|\overrightarrow{RA}|^2+|\overrightarrow{RB}|^2=|\overrightarrow{RC}|^2+|\overrightarrow{RD}|^2$ より，

$$2|\overrightarrow{MA}|^2+2|\overrightarrow{MR}|^2=2|\overrightarrow{NC}|^2+2|\overrightarrow{MR}|^2-4\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MR}+2|\overrightarrow{MN}|^2$$

よって，$2\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MR}=|\overrightarrow{NC}|^2+|\overrightarrow{MN}|^2-|\overrightarrow{MA}|^2$ ……(＊)となり，$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MR}$ は R のとり方によらず一定である。

(4)　点 Q が描く図形と点 R が描く図形が一致する条件は，$|\overrightarrow{RM}|=|\overrightarrow{RN}|$ であり，

$$|\overrightarrow{RM}|^2=|\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MR}|^2,\ |\overrightarrow{RM}|^2=|\overrightarrow{MN}|^2-2\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MR}+|\overrightarrow{MR}|^2$$

(＊)を代入して，$|\overrightarrow{RM}|^2=|\overrightarrow{MN}|^2-|\overrightarrow{NC}|^2-|\overrightarrow{MN}|^2+|\overrightarrow{MA}|^2+|\overrightarrow{MR}|^2$

$$|\overrightarrow{MA}|^2-|\overrightarrow{NC}|^2=0,\ |\overrightarrow{MA}|=|\overrightarrow{NC}|$$

よって，$\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{CD}|$ から，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$ である。

［解 説］

(4)まで，うまく誘導のついている問題です。ただ，(3)の式変形によっては，不運なケースが出てくる可能性もあります。