$\boxed{1}$ 解答解説のページへ

$f(x)=x^3+3x^2-9x$ とする。$y<x<a$ を満たすすべての $x,\ y$ に対して

$$f(x)>\frac{(x-y)f(a)+(a-x)f(y)}{a-y}$$

が成り立つような a の範囲を求めよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

$a,\ b$ を正の実数とする。曲線 $C : y = x^3 - a^2x + a^3$ と点 $\mathrm{P}(b,\ 0)$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　点 P から曲線 C に接線がちょうど 3 本引けるような点 $(a,\ b)$ の存在する領域を図示せよ。

(2)　点 P から曲線 C に接線がちょうど 2 本引けるとする。2 つの接点を A, B としたとき, $\angle \mathrm{APB}$ が $90°$ より小さくなるための a と b の条件を求めよ。

3

解答解説のページへ

$1, 2, 3, 4$ の数字が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードを用いて，次の手順で 5 桁の整数をつくる。まず 1 枚を取り出して現れた数字を一の位とする。取り出した 1 枚を元に戻し，4 枚のカードをよく混ぜて，再び 1 枚を取り出して現れた数字を十の位とする。このような操作を 5 回繰り返して，5 桁の整数をつくる。得られた整数を X とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) X に数字 1 がちょうど 2 回現れる確率を求めよ。

(2) X に数字 1 と数字 2 がちょうど 1 回ずつ現れる確率を求めよ。

(3) X にちょうど 2 回現れる数字が 1 種類以上ある確率を求めよ。

4　　解答解説のページへ

四面体 ABCD において，辺 AB の中点を M，辺 CD の中点を N とする。以下の問いに答えよ。

(1)　等式 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}$ を満たす点 P は存在するか。証明をつけて答えよ。

(2)　点 Q が等式 $|\overrightarrow{\mathrm{QA}}+\overrightarrow{\mathrm{QB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{QC}}+\overrightarrow{\mathrm{QD}}|$ を満たしながら動くとき，点 Q が描く図形を求めよ。

(3)　点 R が等式 $|\overrightarrow{\mathrm{RA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{RB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{RC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{RD}}|^2$ を満たしながら動くとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MR}}$ は R のとり方によらず一定であることを示せ。

(4)　(2)の点 Q が描く図形と(3)の点 R が描く図形が一致するための必要十分条件は $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|$ であることを示せ。

$\boxed{5}$ 解答解説のページへ

$0<t<3$ のとき，連立不等式

$$0 \leqq y \leqq \sin x,\ \ 0 \leqq x \leqq t-y$$

の表す領域を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積を $V(t)$ とする。
$\dfrac{d}{dt}V(t)=\dfrac{\pi}{4}$ となる t と，そのときの $V(t)$ の値を求めよ。

$\boxed{6}$

解答解説のページへ

xy 平面において，原点を中心とし P(1，0) を頂点の 1 つとする正六角形を X とする。A を 2 次の正方行列とし，X の各頂点 $(x,\ y)$ に対して，行列 A の表す移動

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で得られる点 $(x',\ y')$ は X の辺上の点（頂点を含む）であるとする。以下の問いに答えよ。

(1) 点 P が行列 A の表す移動で P 自身に移るとき，X の各頂点は X のいずれかの頂点に移ることを示せ。また，そのときの行列 A を求めよ。

(2) 点 P が行列 A の表す移動で X のある頂点に移るとき，X の各頂点は X のいずれかの頂点に移ることを示せ。また，そのときの行列 A を求めよ。

1

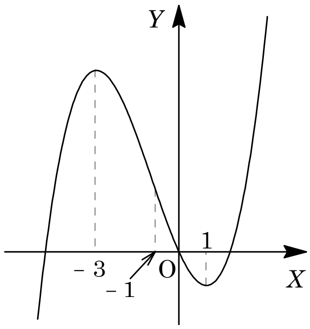
問題のページへ

$f(X)=X^3+3X^2-9X$ に対して,

$$f'(X)=3X^2+6X-9$$
$$=3(X+3)(X-1)$$
$$f''(X)=6X+6=6(X+1)$$

X	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(X)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f''(X)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f(X)$	↗	27	↘	11	↘	-5	↗

これより，$Y=f(X)$ のグラフの概形は右図のようになる。



さて, $y<x<a$ を満たすすべての x, y に対して,

$$f(x)>\frac{(x-y)f(a)+(a-x)f(y)}{a-y} \cdots\cdots\cdots①$$

ここで, $y<x<a$ のとき, XY 平面上で 2 点 $(y,\ f(y))$, $(a,\ f(a))$ を結ぶ線分と直線 $X=x$ との交点を $(x,\ g(x))$ とおくと,

$$g(x)=\frac{(x-y)f(a)+(a-x)f(y)}{(a-x)+(x-y)}$$
$$=\frac{(x-y)f(a)+(a-x)f(y)}{a-y} \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，与えられた条件は, $y<x<a$ を満たすすべての x, y に対して,

$$f(x)>g(x)$$

すなわち，$Y=f(X)$ のグラフが, $X<a$ で上に凸であることを意味する。

よって，求める a の範囲は，$a\leqq -1$ である。

［解 説］

文系の類題は，関数が複雑でないので，計算のみで処理しました。ところが，理系の本問は，同じ方針だと計算量が多くなりすぎるので，不等式の意味を考え，直感的に解いています。

2

問題のページへ

(1)　$C: y=x^3-a^2x+a^3$ に対して，$y'=3x^2-a^2$ となり，接点を $(t,\ t^3-a^2t+a^3)$ とおくと，接線の方程式は，

$$y-(t^3-a^2t+a^3)=(3t^2-a^2)(x-t),\quad y=(3t^2-a^2)x-2t^3+a^3$$

点 $\mathrm{P}(b,\ 0)$ を通ることより，

$$(3t^2-a^2)b-2t^3+a^3=0,\quad 2t^3-3bt^2+a^2b-a^3=0 \cdots\cdots\cdots①$$

3 次曲線に異なる 2 点で接する接線は存在しないので，接線が 3 本存在する条件は，①が異なる実数解を 3 個もつことに等しい。

そこで，①の左辺を $f(t)=2t^3-3bt^2+a^2b-a^3$ とおくと，

$$f'(t)=6t^2-6bt=6t(t-b)$$

t	$\cdots$	0	$\cdots$	b	$\cdots$
$f'(t)$	＋	0	−	0	＋
$f(t)$	↗		↘		↗

$b>0$ より，$f(t)$ の増減は右表のようになり，求める条件は，

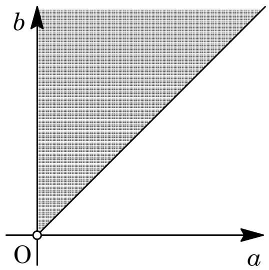
$$f(0)=a^2b-a^3=a^2(b-a)>0 \cdots\cdots\cdots②$$

$$f(b)=-b^3+a^2b-a^3<0 \cdots\cdots\cdots③$$

$a>0$ なので，②から，$b>a>0 \cdots\cdots\cdots④$

③は，$-b(b^2-a^2)-a^3<0$ となり，④のもとで成立する。

よって，点 P から曲線 C に接線が 3 本引ける a，b の条件は④であり，点 $(a,\ b)$ の存在する領域を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含まない。



(2)　接線がちょうど 2 本引ける条件は，(1)より，$f(0)=0$ または $f(b)=0$ である。

(i)　$f(0)=0$ のとき　$b=a$

このとき，$f(t)=2t^3-3at^2=0$ の解は，$t=0,\ \frac{3}{2}a$ である。

そこで，接点を $\mathrm{A}(0,\ a^3)$，$\mathrm{B}\left(\frac{3}{2}a,\ \frac{23}{8}a^3\right)$ とおくと，$\mathrm{P}(a,\ 0)$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=(-a,\ a^3),\quad \overrightarrow{\mathrm{PB}}=\left(\frac{1}{2}a,\ \frac{23}{8}a^3\right)$$

$\angle\mathrm{APB}<90^\circ$ より，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}>0$ となり，$-\frac{1}{2}a^2+\frac{23}{8}a^6>0$ から，$a>\sqrt[4]{\frac{4}{23}}$

(ii)　$f(b)=0$ のとき　$b^3-a^2b+a^3=0$

$b>a>0$ のとき，$b(b^2-a^2)+a^3>0$ となり，成立しない。

$a\geqq b>0$ のとき，$b^3+a^2(a-b)>0$ となり，成立しない。

(i)(ii)より，求める条件は，$a=b>\sqrt[4]{\frac{4}{23}}$ である。

［解　説］

3 次曲線の接線の本数についての頻出問題です。

3

問題のページへ

(1)　各位の数字が 1, 2, 3, 4 の 5 桁の整数 X に，数字 1 が 2 回現れる確率は，

$$ {}_5C_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{135}{512} $$

(2)　X に，数字 1 が 1 回, 2 が 1 回, 3 または 4 が 3 回現れる確率は，

$$ {}_5C_1\ {}_4C_1\,\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{2}{4}\right)^3=\frac{5}{32} $$

(3)　4 種類の数字を a, b, c, d とすると, X にちょうど 2 回現れる数字が 1 種類以上あるのは，次の場合である。

(i)　aabcd のとき

a の選び方が ${}_4C_1$ 通りあることより，その確率は，

$$ {}_4C_1\times\frac{5!}{2!}\left(\frac{1}{4}\right)^5=\frac{15}{64} $$

(ii)　aabbb のとき

a, b の選び方が ${}_4P_2$ 通りあることより，その確率は，

$$ {}_4P_2\times\frac{5!}{2!3!}\left(\frac{1}{4}\right)^5=\frac{15}{128} $$

(iii)　aabbc のとき

a, b の選び方が ${}_4C_2$ 通り, c の選び方が 2 通りあることより，その確率は，

$$ {}_4C_2\times 2\times\frac{5!}{2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^5=\frac{45}{128} $$

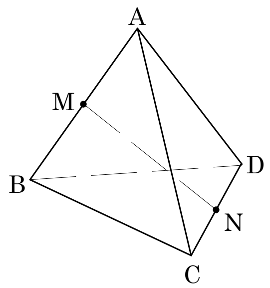
(i)(ii)(iii)より，求める確率は，$\frac{15}{64}+\frac{15}{128}+\frac{45}{128}=\frac{45}{64}$ である。

［解　説］

反復試行の確率に関する基本問題です。

4

問題のページへ



(1)　$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}$ より，$\dfrac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}}{2}=\dfrac{\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}}{2}$ となり，

$$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{PN},\ \overrightarrow{PM}-\overrightarrow{PN}=\vec{0}$$

これより，$\overrightarrow{NM}=\vec{0}$ となり，題意を満たさない。

よって，点 P は存在しない。

(2)　$|\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}|=|\overrightarrow{QC}+\overrightarrow{QD}|$ から，(1)と同様にすると，

$$|\overrightarrow{QM}|=|\overrightarrow{QN}|$$

よって，点 Q は線分 MN の垂直二等分面を描く。

(3)　まず，
$$\begin{aligned}|\overrightarrow{RA}|^2+|\overrightarrow{RB}|^2&=|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MR}|^2+|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MR}|^2\\&=|\overrightarrow{MA}|^2+|\overrightarrow{MB}|^2+2|\overrightarrow{MR}|^2-2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MR}-2\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MR}\\&=2|\overrightarrow{MA}|^2+2|\overrightarrow{MR}|^2-2(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})\cdot\overrightarrow{MR}\\&=2|\overrightarrow{MA}|^2+2|\overrightarrow{MR}|^2\end{aligned}$$

同様にして，
$$\begin{aligned}|\overrightarrow{RC}|^2+|\overrightarrow{RD}|^2&=2|\overrightarrow{NC}|^2+2|\overrightarrow{NR}|^2=2|\overrightarrow{NC}|^2+2|\overrightarrow{MR}-\overrightarrow{MN}|^2\\&=2|\overrightarrow{NC}|^2+2|\overrightarrow{MR}|^2-4\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MR}+2|\overrightarrow{MN}|^2\end{aligned}$$

すると，$|\overrightarrow{RA}|^2+|\overrightarrow{RB}|^2=|\overrightarrow{RC}|^2+|\overrightarrow{RD}|^2$ より，

$$2|\overrightarrow{MA}|^2+2|\overrightarrow{MR}|^2=2|\overrightarrow{NC}|^2+2|\overrightarrow{MR}|^2-4\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MR}+2|\overrightarrow{MN}|^2$$

よって，$2\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MR}=|\overrightarrow{NC}|^2+|\overrightarrow{MN}|^2-|\overrightarrow{MA}|^2$ ……(＊)となり，$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MR}$ は R のとり方によらず一定である。

(4)　点 Q が描く図形と点 R が描く図形が一致する条件は，$|\overrightarrow{RM}|=|\overrightarrow{RN}|$ であり，

$$|\overrightarrow{RM}|^2=|\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MR}|^2,\ |\overrightarrow{RM}|^2=|\overrightarrow{MN}|^2-2\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MR}+|\overrightarrow{MR}|^2$$

(＊)を代入して，$|\overrightarrow{RM}|^2=|\overrightarrow{MN}|^2-|\overrightarrow{NC}|^2-|\overrightarrow{MN}|^2+|\overrightarrow{MA}|^2+|\overrightarrow{MR}|^2$

$$|\overrightarrow{MA}|^2-|\overrightarrow{NC}|^2=0,\ |\overrightarrow{MA}|=|\overrightarrow{NC}|$$

よって，$\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{CD}|$ から，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$ である。

［解　説］

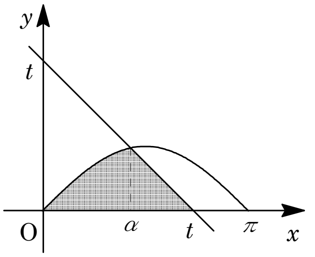
(4)まで，うまく誘導のついている問題です。ただ，(3)の式変形によっては，不運なケースが出てくる可能性もあります。

5

問題のページへ

領域$0\leqq y\leqq \sin x$ ……①，$0\leqq x\leqq t-y$ ……②に対して，$0<t<3$ より，①の境界線$y=\sin x$と②の境界線$y=t-x$の交点はただ１つ存在し，それを$x=\alpha$とおくと，

$$\sin\alpha=t-\alpha\,,\ t=\alpha+\sin\alpha\ \cdots\cdots\cdots③$$



このとき，右図の網点部をx軸のまわりに回転して得られる立体の体積$V(t)$は，③を利用すると，

$$V(t)=\pi\int_0^{\alpha}\sin^2x\,dx+\frac{1}{3}\pi(t-\alpha)\sin^2\alpha=\pi\int_0^{\alpha}\sin^2x\,dx+\frac{1}{3}\pi\sin^3\alpha\ \cdots\cdots\cdots④$$

ここで，③から，$\dfrac{dt}{d\alpha}=1+\cos\alpha$となり，④より，

$$\frac{d}{dt}V(t)=\frac{d}{d\alpha}V(t)\frac{d\alpha}{dt}=(\pi\sin^2\alpha+\pi\sin^2\alpha\cos\alpha)\cdot\frac{1}{1+\cos\alpha}=\pi\sin^2\alpha$$

さて，条件より，$\dfrac{d}{dt}V(t)=\dfrac{\pi}{4}$なので，$\sin^2\alpha=\dfrac{1}{4}$

$0<\alpha<3$から，$\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$となり，$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5}{6}\pi$である。

$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$のとき，③より$t=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{2}<3$から適する。

$\alpha=\dfrac{5}{6}\pi$のとき，③より$t=\dfrac{5}{6}\pi+\dfrac{1}{2}>\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{2}=3$から適さない。

よって，$t=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{2}$であり，このとき，④より，

$$V(t)=\pi\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^2x\,dx+\frac{1}{3}\pi\sin^3\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1-\cos 2x)\,dx+\frac{1}{24}\pi$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big[x-\frac{1}{2}\sin 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}+\frac{1}{24}\pi=\frac{\pi^2}{12}-\Big(\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{1}{24}\Big)\pi$$

［解　説］

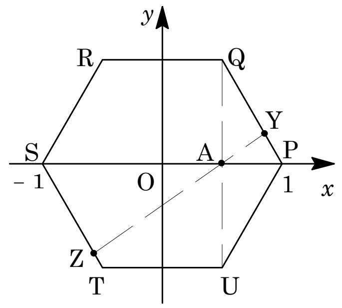
$0<x<\pi$において，$y=\sin x$のグラフは上に凸であり，$x=\pi$における接線の傾きが-1であることから，$y=\sin x$と$y=t-x$の交点はただ１つであることがわかります。また，$0<\alpha<\pi$において，tはαの単調増加関数なので，αはtの関数になっています。これらの点を省略して記しましたので，補足しておきます。

6

問題のページへ

(1)　右図のように，正六角形 X の各頂点を，P，Q，R，S，T，U とおく。また，Q，U が移る点を，それぞれ Q′，U′ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OU}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}},\quad A\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+A\overrightarrow{\mathrm{OU}}=A\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$



P は P 自身に移ることより，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}+\overrightarrow{\mathrm{OU'}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}},\quad \frac{\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}+\overrightarrow{\mathrm{OU'}}}{2}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{2}\cdots\cdots\cdots(*)$$

よって，OP の中点を A とおくと，(＊)は線分 Q′U′ の中点が A であることを意味する。

さて，A を通る直線を描き，折れ線 UPQ との交点を Y，折れ線 QRSTU との交点を Z とおくと，$\mathrm{AY}\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\mathrm{AZ}\geqq\frac{\sqrt{3}}{2}$ となり，AY = AZ となるのは，点 Y，Z が点 Q，U に一致する場合である。

以上より，(Q′，U′) = (Q，U)，(U，Q)

P(1，0)，Q$\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$が移る点から，$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$A\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\\pm\sqrt{3}\end{pmatrix}$

$$A\begin{pmatrix}1&1\\0&\sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&\pm\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

よって，$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&\pm\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&\sqrt{3}\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&1\\0&\pm\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3}&-1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&\pm1\end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$は，すべての点が自分自身に移ることを表し，$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$は，$x$ 軸対称移動を表す。ともに，X の各頂点は X のいずれかの頂点に移る。

(2)　P が移る点で場合分けをして，(1)と同様に考える。

(i)　P が Q に移るとき　$\frac{\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}+\overrightarrow{\mathrm{OU'}}}{2}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{2}$ より，(Q′，U′) = (R，P)，(P，R)

(a)　$A\begin{pmatrix}2&1\\0&\sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\\sqrt{3}&\sqrt{3}\end{pmatrix}$の場合

$$A=\begin{pmatrix}1&-1\\\sqrt{3}&\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\0&\sqrt{3}\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-\sqrt{3}\\\sqrt{3}&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos60^\circ&-\sin60^\circ\\\sin60^\circ&\cos60^\circ\end{pmatrix}$$

A は原点まわりに 60° の回転移動を表す。

(b)　$A\begin{pmatrix}2&1\\0&\sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\\sqrt{3}&0\end{pmatrix}$の場合

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\\sqrt{3}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\0&\sqrt{3}\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&\sqrt{3}\\\sqrt{3}&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos60^\circ&\sin60^\circ\\\sin60^\circ&-\cos60^\circ\end{pmatrix}$$

A は原点を通り，x 軸と 30° の角をなす直線に関する対称移動を表す。

(ii) P が R に移るとき $\dfrac{\overrightarrow{OQ'}+\overrightarrow{OU'}}{2}=\dfrac{\overrightarrow{OR}}{2}$ より，$(Q',\ U')=(S,\ Q),\ (Q,\ S)$

(a) $A\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & \sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ \sqrt{3} & 0\end{pmatrix}$ の場合

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ \sqrt{3} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & \sqrt{3}\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 120^\circ & -\sin 120^\circ\\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ\end{pmatrix}$$

A は原点まわりに 120° の回転移動を表す。

(b) $A\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & \sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ \sqrt{3} & \sqrt{3}\end{pmatrix}$ の場合

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ \sqrt{3} & \sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & \sqrt{3}\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 120^\circ & \sin 120^\circ\\ \sin 120^\circ & -\cos 120^\circ\end{pmatrix}$$

A は原点を通り，x 軸と 60° の角をなす直線に関する対称移動を表す。

(iii) P が S に移るとき $\dfrac{\overrightarrow{OQ'}+\overrightarrow{OU'}}{2}=\dfrac{\overrightarrow{OS}}{2}$ より，$(Q',\ U')=(T,\ R),\ (R,\ T)$

(a) $A\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & \sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 0 & -\sqrt{3}\end{pmatrix}$ の場合

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 0 & -\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & \sqrt{3}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

A は原点対称移動，すなわち原点のまわりに 180° の回転移動を表す。

(b) $A\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & \sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 0 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$ の場合

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 0 & \sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & \sqrt{3}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

A は y 軸対称移動を表す。

(iv) P が T に移るとき $\dfrac{\overrightarrow{OQ'}+\overrightarrow{OU'}}{2}=\dfrac{\overrightarrow{OT}}{2}$ より，$(Q',\ U')=(U,\ S),\ (S,\ U)$

(a) $A\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & \sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -\sqrt{3} & -\sqrt{3}\end{pmatrix}$ の場合

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -\sqrt{3} & -\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & \sqrt{3}\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 240^\circ & -\sin 240^\circ\\ \sin 240^\circ & \cos 240^\circ\end{pmatrix}$$

A は原点まわりに 240° の回転移動を表す。

(b) $A\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & \sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -\sqrt{3} & 0\end{pmatrix}$ の場合

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -\sqrt{3} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & \sqrt{3}\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -\sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 240^\circ & \sin 240^\circ\\ \sin 240^\circ & -\cos 240^\circ\end{pmatrix}$$

A は原点を通り，x 軸と 120° の角をなす直線に関する対称移動を表す。

(v)　P が U に移るとき　$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}+\overrightarrow{\mathrm{OU'}}}{2}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OU}}}{2}$ より，(Q′，U′)＝(P，T)，(T，P)

(a)　$A\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & \sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -\sqrt{3} & 0\end{pmatrix}$ の場合

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -\sqrt{3} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & \sqrt{3}\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 300^\circ & -\sin 300^\circ\\ \sin 300^\circ & \cos 300^\circ\end{pmatrix}$$

A は原点まわりに 300° の回転移動を表す。

(b)　$A\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & \sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -\sqrt{3} & -\sqrt{3}\end{pmatrix}$ の場合

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -\sqrt{3} & -\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & \sqrt{3}\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 300^\circ & \sin 300^\circ\\ \sin 300^\circ & -\cos 300^\circ\end{pmatrix}$$

A は原点を通り, x 軸と 150° の角をなす直線に関する対称移動を表す。

(i)～(v)をまとめ, (1)の結果も合わせると,

$$A=\pm\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \pm\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\ \pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix},\ \pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix}$$
$$\pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix},\ \pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$$

また，これらの行列 A の表す移動で, X の各頂点は X のいずれかの頂点に移る。

［解 説］

(1)と同じスタイルで(2)を解くと，プロセスをかなり省いても，このように B5 版で 2 枚半ほどのスペースが必要です。質・量ともに，かなりハードな問題です。なお, (1)は，最初，逆ベクトルに注目しましたが，この考え方は(2)にうまくつながりません。再考したものが上の解です。