1

解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1) 実数 x に関する連立不等式

$$x \geqq -1,\ 2\cdot 3^{x} + a\cdot 3^{-x} \leqq 1$$

が解をもつような実数 a の範囲を求めよ。

(2) $x \geqq -1$ を満たすすべての実数 x に対し，不等式 $3^{x} + a\cdot 3^{-x} \geqq a$ が成り立つような実数 a の範囲を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

三角形 OAB の辺 AB を$1:2$に内分する点を C とする。動点 D は$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=x\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ $(x \geqq 1)$を満たすとし，直線 CD と直線 OB の交点を E とする。

(1) 実数 y を $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で定めるとき，次の等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=3$$

(2) 三角形 OAB の面積を S, 三角形 ODE の面積を T とするとき，$\dfrac{S}{T}$ の最大値と，そのときの x を求めよ。

3

解答解説のページへ

先生と 3 人の生徒 A, B, C がおり，玉の入った箱がある。箱の中には最初，赤玉 3 個，白玉 7 個，全部で 10 個の玉が入っている。先生がサイコロをふって，1 の目が出たら A が，2 または 3 の目が出たら B が，その他の目が出たら C が箱の中から 1 つだけ玉を取り出す操作を行う。取り出した玉は箱の中に戻さず，取り出した生徒のものとする。この操作を 2 回続けて行うものとして以下の問いに答えよ。

ただし，サイコロの 1 から 6 の目の出る確率は等しいものとし，また，箱の中のそれぞれの玉の取り出される確率は等しいものとする。

(1)　A が 2 個の赤玉を手に入れる確率を求めよ。

(2)　B が少なくとも 1 個の赤玉を手に入れる確率を求めよ。

4

解答解説のページへ

放物線 $y=x^2$ の 2 本の接線 $l,\ m$ は垂直であるとする。

(1)　l の接点の座標が $(a,\ a^2)$ で与えられるとき，$l,\ m$ の交点の座標を a を用いて表せ。

(2)　$l,\ m$ が y 軸に関して対称なとき，$l,\ m$ および放物線 $y=x^2$ で囲まれる部分の面積を求めよ。

1

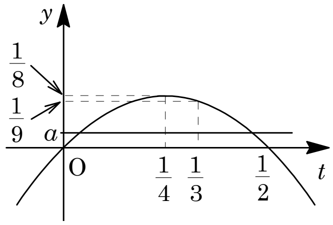
問題のページへ

(1)　条件より，$2\cdot 3^x+a\cdot 3^{-x}\leqq 1$ は，$t=3^x$ とおくと，$2t+\dfrac{a}{t}\leqq 1$ となり，

$$a\leqq -2t^2+t\,,\ \ a\leqq -2\Big(t-\frac{1}{4}\Big)^2+\frac{1}{8}\cdots\cdots\cdots①$$

また，$x\geqq -1$ から，$t\geqq\dfrac{1}{3}$ ………②

すると，連立不等式①②が解をもつ条件は，$t\geqq\dfrac{1}{3}$ と直線 $y=a$ が $y=-2\Big(t-\dfrac{1}{4}\Big)^2+\dfrac{1}{8}$ のグラフの下側にある t の範囲に共通部分が存在することに対応する。



よって，右図より，$a\leqq\dfrac{1}{9}$ である。

(2)　(1)と同様にすると，$3^x+a\cdot 3^{-x}\geqq a$ は，$t+\dfrac{a}{t}\geqq a$ となり，

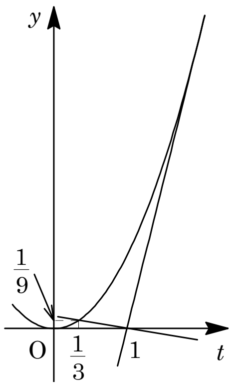
$$t^2+a\geqq at\,,\ \ t^2\geqq a(t-1)\cdots\cdots\cdots③$$

条件より，②のとき③がつねに成立する条件は，$t\geqq\dfrac{1}{3}$ において，$y=t^2$ ……④のグラフがつねに直線 $y=a(t-1)$ ……⑤の上側にあることに対応する。

⑤が点 $\Big(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{9}\Big)$ を通るとき，$\dfrac{1}{9}=a\Big(\dfrac{1}{3}-1\Big)$ から，$a=-\dfrac{1}{6}$

④と⑤が接するとき，$t^2-a(t-1)=0$ の判別式が，

$$D=a^2-4a=0\,,\ \ a=0,\ 4$$



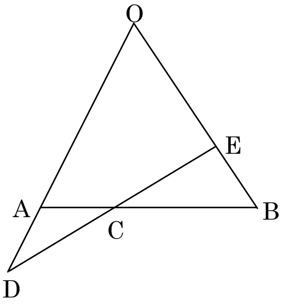
よって，右図から，求める a の範囲は，$-\dfrac{1}{6}\leqq a\leqq 4$ となる。

［解　説］

指数不等式が題材ですが，置き換えれば 2 次不等式となります。どちらの設問も，グラフを用いて眼で解いています。

2

問題のページへ



(1)　△OAB と直線 DE に対し，メネラウスの定理より，

$$\frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{DA}}\cdot\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CB}}\cdot\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EO}}=1$$

$\mathrm{AC}:\mathrm{CB}=1:2$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=x\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ から，

$$\frac{x}{x-1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1-y}{y}=1,\ \ x(1-y)=2y(x-1)$$

よって，$x+2y=3xy$ より，$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=3$ ………(＊)

(2)　まず，$T=xyS$ から，$\dfrac{S}{T}=\dfrac{1}{xy}$ となる。

さて，(＊)から，相加平均と相乗平均の関係を用いると，

$$3=\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\geqq 2\sqrt{\frac{2}{xy}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{xy}},\ \ \frac{9}{8}\geqq\frac{1}{xy}$$

等号は，$\dfrac{2}{x}=\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{2}\left(x=\dfrac{4}{3},\ y=\dfrac{2}{3}\right)$ のときに成立するが，この値は，条件の $x\geqq 1$ を満たしている。

よって，$\dfrac{S}{T}$ の最大値は $\dfrac{9}{8}$ となり，このとき $x=\dfrac{4}{3}$ である。

［解　説］

有名な頻出問題です。ベクトルを用いて普通に解く方法もあります。

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1)　A, B, C が玉を取り出す確率は，それぞれ $\dfrac{1}{6}$，$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{2}$ である。

最初，赤玉 3 個，白玉 7 個入った箱から，A が赤玉 2 個を取り出す確率は，

$$\left(\frac{1}{6}\times\frac{3}{10}\right)\times\left(\frac{1}{6}\times\frac{2}{9}\right)=\frac{1}{540}$$

(2)　まず, B が赤玉を手に入れない場合の確率を求める。

(i)　1 回目に B が白玉, 2 回目も B が白玉を取り出すとき

$$\left(\frac{1}{3}\times\frac{7}{10}\right)\times\left(\frac{1}{3}\times\frac{6}{9}\right)=\frac{7}{135}$$

(ii)　1 回目に B が白玉, 2 回目は A または C が取り出すとき

$$\left(\frac{1}{3}\times\frac{7}{10}\right)\times\left(\frac{2}{3}\times1\right)=\frac{7}{45}$$

(iii)　1 回目は A または C, 2 回目に B が白玉を取り出すとき

1 回目に赤玉を取り出すときと白玉を取り出すときに分けると,

$$\left(\frac{2}{3}\times\frac{3}{10}\right)\times\left(\frac{1}{3}\times\frac{7}{9}\right)+\left(\frac{2}{3}\times\frac{7}{10}\right)\times\left(\frac{1}{3}\times\frac{6}{9}\right)=\frac{7}{45}$$

(iv)　1 回目に A または C, 2 回目も A または C が取り出すとき

$$\left(\frac{2}{3}\times1\right)\times\left(\frac{2}{3}\times1\right)=\frac{4}{9}$$

(i)～(iv)より, B が少なくとも 1 個の赤玉を手に入れる確率は,

$$1-\left(\frac{7}{135}+\frac{7}{45}+\frac{7}{45}+\frac{4}{9}\right)=\frac{26}{135}$$

［解　説］

注意力がすべてといっても過言ではない問題です。(2)は，余事象を考えない方がよかったかもしれません。さらに，(iii)の場合も(ii)にまとめた方がよかったかもしれません。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　$y=x^2$ より，$y'=2x$ となり，点$(a,\ a^2)$における接線 l は,

$$y-a^2=2a(x-a),\ \ y=2ax-a^2\ \cdots\cdots\cdots①$$

接線 m は, 同様にして接点$(b,\ b^2)$とすると，$y=2bx-b^2\ \cdots\cdots\cdots②$

①②の交点は，$2ax-a^2=2bx-b^2$，$2(a-b)x=a^2-b^2$ から,

$$x=\frac{a+b}{2},\ \ y=2a\cdot\frac{a+b}{2}-a^2=ab\ \cdots\cdots\cdots③$$

さて, 条件より, 2 本の接線 l, m は直交するので,

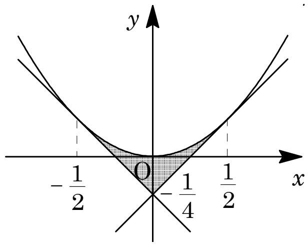
$$2a\cdot 2b=-1,\ \ b=-\frac{1}{4a}\ \cdots\cdots\cdots④$$

③④から，$x=\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{4a}\right)=\frac{4a^2-1}{8a}$，$y=-a\cdot\frac{1}{4a}=-\frac{1}{4}$

よって, l, m の交点の座標は, $\left(\frac{4a^2-1}{8a},\ -\frac{1}{4}\right)$となる。

(2)　l, m が y 軸に関して対称なとき, 交点は y 軸上にあるので,

$$4a^2-1=0,\ \ a=\pm\frac{1}{2}$$



このとき, 接線 l, m は，$y=x-\frac{1}{4}$，$y=-x-\frac{1}{4}$ となり，l, m および放物線 $y=x^2$ で囲まれる部分の面積 S は, y 軸対称性を考えて,

$$S=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)dx=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2dx$$

$$=\frac{2}{3}\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^3\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{12}$$

[解 説]

放物線と接線で囲まれた図形が題材のセンター試験でも頻出の基本問題です。