

1

解答解説のページへ

実数 a に対し、不等式 $y \leq 2ax - a^2 + 2a + 2$ の表す座標平面上の領域を $D(a)$ とおく。

- (1) $-1 \leq a \leq 2$ を満たすすべての a に対し $D(a)$ の点となるような点 (p, q) の範囲を図示せよ。
- (2) $-1 \leq a \leq 2$ を満たすいずれかの a に対し $D(a)$ の点となるような点 (p, q) の範囲を図示せよ。

2

解答解説のページへ

a を実数とする。円 C は点 $(a, -a)$ で直線 $y = -x$ を接線にもち、点 $(0, 1)$ を通るものとする。 C の中心を $P(X, Y)$ として、以下の問いに答えよ。

- (1) X, Y を a を用いて表せ。
- (2) a が動くときの点 P の軌跡と直線 $y = 1$ で囲まれる図形の面積を求めよ。

3

解答解説のページへ

先生と 3 人の生徒 A, B, C がおり、玉の入った箱がある。箱の中には最初、赤玉 3 個、白玉 7 個、全部で 10 個の玉が入っている。先生がサイコロをふって、1 の目が出たら A が、2 または 3 の目が出たら B が、その他の目が出たら C が箱の中から 1 つだけ玉を取り出す操作を行う。取り出した玉は箱の中に戻さず、取り出した生徒のものとする。この操作を続けて行うものとして以下の問いに答えよ。

ただし、サイコロの 1 から 6 の目の出る確率は等しいものとし、また、箱の中のそれぞれの玉の取り出される確率は等しいものとする。

- (1) 2 回目の操作が終わったとき、A が 2 個の赤玉を手に入れている確率を求めよ。
- (2) 2 回目の操作が終わったとき、B が少なくとも 1 個の赤玉を手に入れている確率を求めよ。
- (3) 3 回目の操作で、C が赤玉を取り出す確率を求めよ。

4

解答解説のページへ

平面上に長さ 3 の線分 OA を考え、ベクトル \overrightarrow{OA} を \vec{a} で表す。 $0 < t < 1$ を満たす実数 t に対して、 $\overrightarrow{OP} = t\vec{a}$ となるように点 P を定める。大きさ 2 のベクトル \vec{b} を \vec{a} と角 θ ($0 < \theta < \pi$) をなすようにとり、点 B を $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ で定める。線分 OB の中点を Q とし、線分 AQ と線分 BP の交点を R とする。

このとき、どのように θ をとっても \overrightarrow{OR} と \overrightarrow{AB} が垂直にならないような t の値の範囲を求めよ。

5

解答解説のページへ

a を実数, z を 0 でない複素数とする。 z と共役な複素数を \bar{z} で表す。

- (1) 次を満たす z を求めよ。

$$z + 1 - \frac{a}{z} = 0$$

- (2) 次を満たす z が存在するような a の範囲を求めよ。

$$\bar{z} + 1 - \frac{a}{z} = 0$$

- (3) 次を満たす z が存在するような a の範囲を求めよ。

$$z(\bar{z})^2 + \bar{z} - \frac{a}{z} = 0$$

6

解答解説のページへ

行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換を f とする。 f による点 $P(1, 1)$ の像を P_1 とする。

正の整数 n に対し、 P_n の f による像を P_{n+1} とする。 P_n が点 $Q(10, 10)$ に最も近くなるときの n の値を求めよ。

1

問題のページへ

(1) 不等式 $y \leq 2ax - a^2 + 2a + 2$ の表す領域に、点 (p, q) が存在しているので、

$$q \leq 2ap - a^2 + 2a + 2, \quad a^2 - 2(p+1)a + q - 2 \leq 0 \cdots \cdots (*)$$

ここで、 $f(a) = a^2 - 2(p+1)a + q - 2$ とおくと、

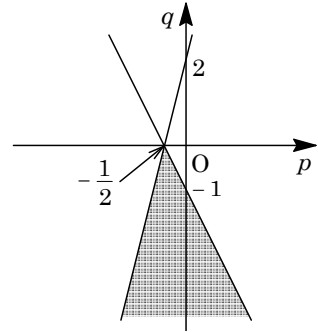
(*)は $f(a) \leq 0$ となる。

さて、 $-1 \leq a \leq 2$ を満たすすべての a に対し、 $f(a) \leq 0$ である条件は、

$$f(-1) = 2p + q + 1 \leq 0$$

$$f(2) = -4p + q - 2 \leq 0$$

よって、点 (p, q) の範囲を図示すると、右図の網点部となる。ただし、境界は領域に含む。



(2) (1)と同様に、 $-1 \leq a \leq 2$ を満たすいずれかの a に対し、 $f(a) \leq 0$ である条件は、

(i) $p+1 \leq -1$ ($p \leq -2$) のとき

$$f(-1) = 2p + q + 1 \leq 0$$

(ii) $-1 \leq p+1 \leq 2$ ($-2 \leq p \leq 1$) のとき

$f(a) = 0$ が実数解をもつことより、

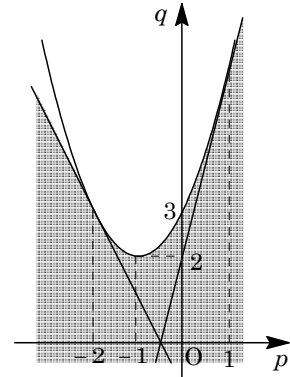
$$D/4 = (p+1)^2 - q + 2 \geq 0, \quad q \leq (p+1)^2 + 2$$

(iii) $p+1 \geq 2$ ($p \geq 1$) のとき

$$f(2) = -4p + q - 2 \leq 0$$

(i)~(ii)より、点 (p, q) の範囲は右図の網点部となる。

ただし、境界は領域に含む。



[解説]

2次不等式と領域の融合問題です。基本的な内容ですが、時間はかかります。

2

問題のページへ

(1) 円 C の中心 $P(X, Y)$ は、点 $(a, -a)$ を通り、接線 $y = -x$ に垂直な直線上にあり、

$$Y + a = X - a, \quad X = Y + 2a \cdots \cdots \textcircled{1}$$

また、点 P と点 $(a, -a)$ の距離と、点 P と点 $(0, 1)$ の距離は等しいので、

$$(X - a)^2 + (Y + a)^2 = X^2 + (Y - 1)^2, \quad -2aX + 2(a + 1)Y + 2a^2 = 1 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①②より、 $-2a(Y + 2a) + 2(a + 1)Y + 2a^2 = 1$ 、 $2Y = 2a^2 + 1$ となり、

$$Y = \frac{2a^2 + 1}{2}, \quad X = \frac{2a^2 + 1}{2} + 2a = \frac{2a^2 + 4a + 1}{2}$$

(2) (1)より、点 P の軌跡は、 $x = \frac{2a^2 + 4a + 1}{2}$ 、 $y = \frac{2a^2 + 1}{2}$ から、

$$\frac{dx}{da} = 2a + 2, \quad \frac{dy}{da} = 2a$$

すると、 x, y の増減は右表のようになる。

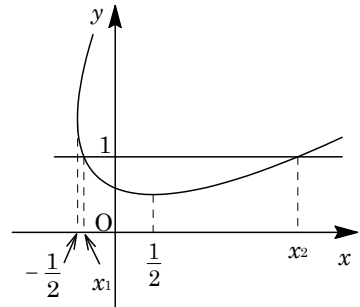
また、点 P の軌跡と直線 $y = 1$ との交点は、

$$\frac{2a^2 + 1}{2} = 1, \quad a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

これより、点 P の軌跡と直線 $y = 1$ とで囲まれる図形の面積 S は、

a	...	-1	...	0	...
$\frac{dx}{da}$	-	0	+		+
x	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↗
$\frac{dy}{da}$	-		-	0	+
y	↘	$\frac{3}{2}$	↘	$\frac{1}{2}$	↗

$$\begin{aligned} S &= \int_{x_1}^{x_2} (1 - y) dx \\ &= \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(1 - \frac{2a^2 + 1}{2}\right) (2a + 2) da \\ &= \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (-2a^3 - 2a^2 + a + 1) da \\ &= 2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (-2a^2 + 1) da \\ &= 2 \left[-\frac{2}{3} a^3 + a \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{3} \sqrt{2} \end{aligned}$$



[解説]

(2)では、最初、パラメータを消去しようとしたのですが、交点の座標の値をみて、考え直しました。その結果が、上の解答例です。

3

問題のページへ

- (1) A, B, C が玉を取り出す確率は、それぞれ $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ である。

最初、赤玉 3 個、白玉 7 個入った箱から、A が赤玉 2 個を取り出す確率は、

$$\left(\frac{1}{6} \times \frac{3}{10}\right) \times \left(\frac{1}{6} \times \frac{2}{9}\right) = \frac{1}{540}$$

- (2) まず、B が赤玉を手に入れない場合の確率を求める。

- (i) 1 回目に B が白玉、2 回目も B が白玉を取り出すとき

$$\left(\frac{1}{3} \times \frac{7}{10}\right) \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{6}{9}\right) = \frac{7}{135}$$

- (ii) 1 回目に B が白玉、2 回目は A または C が取り出すとき

$$\left(\frac{1}{3} \times \frac{7}{10}\right) \times \left(\frac{2}{3} \times 1\right) = \frac{7}{45}$$

- (iii) 1 回目は A または C、2 回目に B が白玉を取り出すとき

1 回目に赤玉を取り出すときと白玉を取り出すときに分けると、

$$\left(\frac{2}{3} \times \frac{3}{10}\right) \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{7}{9}\right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{7}{10}\right) \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{6}{9}\right) = \frac{7}{45}$$

- (iv) 1 回目に A または C、2 回目も A または C が取り出すとき

$$\left(\frac{2}{3} \times 1\right) \times \left(\frac{2}{3} \times 1\right) = \frac{4}{9}$$

- (i)~(iv) より、B が少なくとも 1 個の赤玉を手に入れる確率は、

$$1 - \left(\frac{7}{135} + \frac{7}{45} + \frac{7}{45} + \frac{4}{9}\right) = \frac{26}{135}$$

- (3) 3 回目の操作で、C が赤玉を取り出す確率は、

- (i) 1 回目に赤玉、2 回目も赤玉のとき $\left(1 \times \frac{3}{10}\right) \times \left(1 \times \frac{2}{9}\right) \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{240}$

- (ii) 1 回目に赤玉、2 回目に白玉のとき $\left(1 \times \frac{3}{10}\right) \times \left(1 \times \frac{7}{9}\right) \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{8}\right) = \frac{7}{240}$

- (iii) 1 回目に白玉、2 回目に赤玉のとき $\left(1 \times \frac{7}{10}\right) \times \left(1 \times \frac{3}{9}\right) \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{8}\right) = \frac{7}{240}$

- (iv) 1 回目に白玉、2 回目も白玉のとき $\left(1 \times \frac{7}{10}\right) \times \left(1 \times \frac{6}{9}\right) \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{8}\right) = \frac{21}{240}$

- (i)~(iv) より、 $\frac{1}{240} + \frac{7}{240} + \frac{7}{240} + \frac{21}{240} = \frac{3}{20}$

[解説]

注意力がすべてといっても過言ではない問題です。(2)は、余事象を考えない方がよかったかもしれません。さらに、(iii)の場合も(ii)にまとめた方がよかったかもしれません。なお、(2)までは文理共通です。

4

問題のページへ

$\triangle OPB$ と直線 AQ に対し、メネラウスの定理より、

$$\frac{OA}{AP} \cdot \frac{PR}{RB} \cdot \frac{BQ}{QO} = 1$$

$\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OA}$ であり、点 Q は線分 OB の中点から、

$$\frac{1}{1-t} \cdot \frac{PR}{RB} \cdot \frac{1}{1} = 1, \quad \frac{PR}{RB} = 1-t$$

よって、 $PR:RB=1-t:1$ から、

$$\overrightarrow{OR} = \frac{\overrightarrow{OP} + (1-t)\overrightarrow{OB}}{2-t} = \frac{t\vec{a} + (1-t)\vec{b}}{2-t}$$

さて、 \overrightarrow{OR} と \overrightarrow{AB} が垂直にならない条件は、 $\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{AB} \neq 0$ より、

$$\{t\vec{a} + (1-t)\vec{b}\} \cdot (-\vec{a} + \vec{b}) \neq 0$$

条件より、 $|\vec{a}|^2 = 9$ 、 $|\vec{b}|^2 = 4$ 、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 2 \cos \theta = 6 \cos \theta$ なので、

$$-9t + 6t \cos \theta - 6(1-t) \cos \theta + 4(1-t) \neq 0$$

$$6(2t-1) \cos \theta - 13t + 4 \neq 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

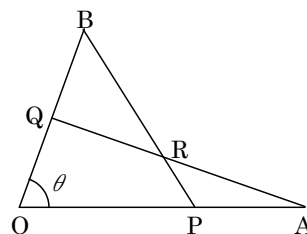
ここで、 $x = \cos \theta$ とおくと、 $0 < \theta < \pi$ から $-1 < x < 1$ となり、 $\textcircled{1}$ より、

$$6(2t-1)x - 13t + 4 \neq 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

すると、 $0 < t < 1$ のもとで、 $-1 < x < 1$ を満たすどんな x に対しても、 $\textcircled{2}$ を満たす条件は、 $f(x) = 6(2t-1)x - 13t + 4$ とおくと、

$$f(-1) = -25t + 10, \quad f(1) = -t - 2 < 0$$

よって、求める条件は、 $f(1) < 0$ に注意すると、 $f(-1) \leq 0$ から $\frac{2}{5} \leq t < 1$ である。



[解説]

ベクトルというよりは、数式処理の問題です。置き換えると、高々1次の $f(x)$ が現れ、そのグラフのイメージをもとに解いています。

5

問題のページへ

(1) $z+1-\frac{a}{z}=0$ より, $z^2+z-a=0$ ($z \neq 0$) となり,

(i) $a \neq 0$ のとき $z = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$

(ii) $a = 0$ のとき $z = -1$

(2) $\bar{z}+1-\frac{a}{z}=0$ より, $a = z\bar{z}+z$ となり, $z = x+yi$ ($x^2+y^2 \neq 0$) とおくと,

$$a = (x+yi)(x-yi) + x + yi = x^2 + y^2 + x + yi$$

a, x, y は実数より, $y = 0$ となり,

$$a = x^2 + x = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \quad (x \neq 0)$$

よって, $a \geq -\frac{1}{4}$ である。

(3) $z(\bar{z})^2 + \bar{z} - \frac{a}{z} = 0$ より, $a = (z\bar{z})^2 + z\bar{z}$ となり, (2)と同様にすると,

$$a = \left(z\bar{z} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \quad (z\bar{z} = x^2 + y^2 > 0)$$

よって, $a > 0$ である。

[解説]

一見すると, 難問風ですが, 普通に計算していけばよい問題でした。

6

問題のページへ

$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ に対し, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とすると,

$$A^2 - 2A + E = O, \quad (A - E)^2 = O$$

ここで, $B = A - E$ とおくと $B^2 = O$ から, 二項定理を利用して,

$$A^n = (B + E)^n = nB + E = n \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n+1 & -n \\ 4n & -2n+1 \end{pmatrix}$$

さて, 条件より, $P_n(x_n, y_n)$ とおくと, $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ となる。

ここで, $P_0(1, 1)$ としてもよいので,

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n+1 & -n \\ 4n & -2n+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 \\ 2n+1 \end{pmatrix}$$

さらに, 点 $Q(10, 10)$ に対して,

$$\begin{aligned} P_n Q^2 &= (x_n - 10)^2 + (y_n - 10)^2 = (n - 9)^2 + (2n - 9)^2 \\ &= 5n^2 - 54n + 162 = 5 \left(n - \frac{27}{5} \right)^2 - \frac{27^2}{5} + 162 \end{aligned}$$

n は整数なので, $\frac{27}{5} = 5.4$ から $n = 5$ のとき $P_n Q^2$ は最小値をとる。すなわち, P_n が点 Q に最も近くなるのは, $n = 5$ のときである。

【解説】

固有方程式が重解をもつ行列が与えられています。この行列の n 乗を求めるのに, ノーヒントですが, 二項定理を利用した解法を採用しています。普通に, 予測→数学的帰納法でも構いません。