1

解答解説のページへ

a を正の実数とし，$a \neq \dfrac{1}{2}$ とする。曲線 $C : y = x^2$ 上の 2 点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$ と $\mathrm{Q}(a,\ a^2)$ をとる。点 P を通り P における C の接線と直交する直線を l とし，点 Q を通り Q における C の接線と直交する直線を m とする。l と m の交点が C 上にあるとき，以下の問いに答えよ。

(1)　a の値を求めよ。

(2)　2 直線 l, m と曲線 C で囲まれた図形のうちで y 軸の右側の部分の面積を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

関数 $f(x)$ を，$f(x)=\left|2\cos^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x-\sin x+\sqrt{3}\cos x-\dfrac{5}{4}\right|$ と定める。以下の問いに答えよ。

(1)　$t=-\sin x+\sqrt{3}\cos x$ とおく。$f(x)$ を t の関数として表せ。

(2)　x が $0°\leqq x\leqq 90°$ の範囲を動くとき，t のとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　x が $0°\leqq x\leqq 90°$ の範囲を動くとき，$f(x)$ のとりうる値の範囲を求めよ。また，$f(x)$ が最大値をとる x は，$60°<x<75°$ を満たすことを示せ。

3

解答解説のページへ

袋A, 袋Bのそれぞれに, 1からNの自然数がひとつずつ書かれたN枚のカードが入っている。これらのカードをよくかきまぜて取り出していく。以下の問いに答えよ。

(1)　$N=4$とする。袋A, Bのそれぞれから同時に1枚ずつカードを取り出し, 数字が同じかどうかを確認する操作を繰り返す。ただし, 取り出したカードは元には戻さないものとする。4回のカードの取り出し操作が終わった後, 数字が一致していた回数をXとする。$X=1$，$X=2$，$X=3$，$X=4$となる確率をそれぞれ求めよ。また, Xの期待値を求めよ。

(2)　$N=3$とし，nは自然数とする。袋A, Bのそれぞれから同時に1枚ずつカードを取り出し，カードの数字が一致していたら，そのカードを取り除き，一致していなかったら，元の袋に戻すという操作を繰り返す。カードが初めて取り除かれるのがn回目で起こる確率をp_nとし, n回目の操作ですべてのカードが取り除かれる確率をq_nとする。p_nとq_nを求めよ。

4

解答解説のページへ

平面上のベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$が，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{1}{2}$を満たすとする。ただし，記号$\vec{a}\cdot\vec{b}$は$\vec{a}$と$\vec{b}$の内積を表す。以下の問いに答えよ。

(1)　実数 p，q に対して，$\vec{c}=p\vec{a}+q\vec{b}$とおく。このとき，次の条件$|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$，$p>0$を満たす実数$p, q$を求めよ。

(2)　平面上のベクトル$\vec{x}$が，$-1\leqq\vec{a}\cdot\vec{x}\leqq1$，$1\leqq\vec{b}\cdot\vec{x}\leqq2$を満たすとき，$|\vec{x}|$のとりうる値の範囲を求めよ。

1

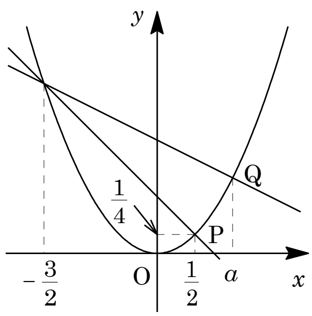
問題のページへ

(1)　$C: y = x^2$ ……①に対して，$y' = 2x$

$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$における接線の傾きは 1 なので，接線と直交する直線 l は,

$$y - \frac{1}{4} = -\left(x - \frac{1}{2}\right),\ \ y = -x + \frac{3}{4}\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②の交点は，$x^2 = -x + \dfrac{3}{4}$，$\left(x - \dfrac{1}{2}\right)\left(x + \dfrac{3}{2}\right) = 0$ となり，$x = \dfrac{1}{2},\ -\dfrac{3}{2}$ である。



ここで，$\mathrm{Q}(a,\ a^2)$ における接線と直交する直線 m は，同様にして,

$$y - a^2 = -\frac{1}{2a}(x - a),\ \ y = -\frac{1}{2a}x + \frac{1}{2} + a^2\ \cdots\cdots\cdots③$$

また，①③の交点は，$x^2 = -\dfrac{1}{2a}x + \dfrac{1}{2} + a^2$，$(x - a)\left(x + \dfrac{1}{2a} + a\right) = 0$ となり，

$$x = a,\ -\frac{1}{2a} - a$$

$a > 0$ で，$a \neq \dfrac{1}{2}$ から，$-\dfrac{3}{2} = -\dfrac{1}{2a} - a$ となり，$2a^2 - 3a + 1 = 0$

よって，$(2a - 1)(a - 1) = 0$ より，$a = 1$ である。

(2)　$a = 1$ のとき，直線 m は，$y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$ となる。

2 直線 l, m と曲線 C で囲まれた図形のうちで $x \geqq 0$ の部分の面積 S は,

$$S = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{2}\right)\cdot 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right)\cdot\frac{1}{2} - \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2 dx = \frac{5}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{8}\right) = \frac{17}{24}$$

［解 説］

放物線と直線に囲まれた面積という定番の問題です。(2)では，台形の面積公式を利用しています。

2

問題のページへ

(1)　条件より，$t=-\sin x+\sqrt{3}\cos x$ とおくと，

$$t^2=\sin^2x+3\cos^2x-2\sqrt{3}\sin x\cos x=2\cos^2x-2\sqrt{3}\sin x\cos x+1$$

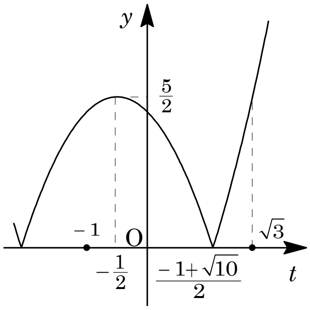
これより，$f(x)=\left|2\cos^2x-2\sqrt{3}\sin x\cos x-\sin x+\sqrt{3}\cos x-\frac{5}{4}\right|$ に対して，

$$f(x)=\left|t^2-1+t-\frac{5}{4}\right|=\left|t^2+t-\frac{9}{4}\right|$$

(2)　$t=2\sin(x+120°)$ なので，$0°\leqq x\leqq 90°$ のとき，$120°\leqq x+120°\leqq 210°$ から，

$$-1\leqq t\leqq\sqrt{3}$$

(3)　$f(x)=g(t)$ とおくと，$g(t)=\left|\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{2}\right|$



$g(t)=0$ となるのは，$t=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{-1\pm\sqrt{10}}{2}$

すると，$y=g(t)$ のグラフは右図のようになり，

$$g(\sqrt{3})-g\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\sqrt{3}+\frac{3}{4}\right)-\frac{5}{2}=\sqrt{3}-\frac{7}{4}<0$$

よって，$f(x)=g(t)$ のとりうる値の範囲は，

$$0\leqq f(x)\leqq\frac{5}{2}$$

また，$f(x)$ が最大となるのは，$t=2\sin(x+120°)=-\frac{1}{2}$ のとき，すなわち，

$$\sin(x+120°)=-\frac{1}{4}\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，加法定理より，

$$\sin195°=-\sin15°=-\sin(45°-30°)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

すると，$-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{6-(\sqrt{2}+1)^2}{4(\sqrt{6}+\sqrt{2}+1)}=\frac{3-2\sqrt{2}}{4(\sqrt{6}+\sqrt{2}+1)}>0$ より，$(*)$に対し，

$$-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}<-\frac{1}{4}<0,\quad \sin195°<\sin(x+120°)<\sin180°$$

よって，$180°<x+120°<195°$ となり，$60°<x<75°$ である。

［解　説］

よく見かける置き換えによって最大・最小を求める問題です。ただ，最後の詰めが結論はわかっているものの，ややこしいです。

3

問題のページへ

(1) 与えられた試行に対して，A から取り出した数字と，B から取り出した数字が一致する回数を X とし，$X=i$ である確率を $P(i)$ とおく。

$X=4$ となるのは，A からの取り出し方に対する B からの取り出し方が 1 通りのときより，$P(4)=\dfrac{1}{4!}=\dfrac{1}{24}$ である。

$X=3$ となる場合はないので，$P(3)=0$ である。

$X=2$ となるのは，A からの取り出し方に対する B からの取り出し方が，一致する数字の対応が ${}_4\mathrm{C}_2$ 通り，それぞれに対し，一致しない数字の対応が 1 通りずつのときである。これより，$P(2)=\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2\cdot 1}{4!}=\dfrac{1}{4}$ である。

$X=1$ となるのは，A からの取り出し方に対する B からの取り出し方が，一致する数字の対応が ${}_4\mathrm{C}_1$ 通り，それぞれに対し，一致しない数字の対応が 2 通りずつのときである。これより，$P(1)=\dfrac{{}_4\mathrm{C}_1\cdot 2}{4!}=\dfrac{1}{3}$ である。

したがって，X の期待値は，$4\times\dfrac{1}{24}+2\times\dfrac{1}{4}+1\times\dfrac{1}{3}=1$ である。

(2) 与えられた試行に対して，カードの数字が一致する確率は $\dfrac{1}{3}$，一致しない確率は $\dfrac{2}{3}$ なので，n 回目でカードが初めて取り除かれる確率 p_n は，$n\geqq 2$ のとき，

$$p_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

これは，$n=1$ のときも成立している。

また，n 回目の操作ですべてのカードが取り除かれる確率 q_n は，$q_1=q_2=0$

$n\geqq 3$ のときは，k 回目 $(1\leqq k\leqq n-2)$ で初めてカードが 1 枚取り除かれ，$n-1$ 回目と n 回目に 1 枚ずつ取り除かれる場合である。カードが 2 枚のとき，数字が一致する確率は $\dfrac{1}{2}$，一致しない確率は $\dfrac{1}{2}$ なので，

$$q_n=\sum_{k=1}^{n-2}p_k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2-k}\cdot\frac{1}{2}=\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-k}=\sum_{k=1}^{n-2}\left(\frac{2}{3}\right)^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\sum_{k=1}^{n-2}\left(\frac{4}{3}\right)^{k}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\cdot\frac{\frac{4}{3}\left\{\left(\frac{4}{3}\right)^{n-2}-1\right\}}{\frac{4}{3}-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\left\{\left(\frac{4}{3}\right)^{n-2}-1\right\}$$

$$=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

［解 説］

頻出ですが，(2)は不注意によるミスをやってしまいがちな問題です。

4

問題のページへ

(1) $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{1}{2}$ より，

$$|\vec{c}|^2=|p\vec{a}+q\vec{b}|^2=p^2|\vec{a}|^2+2pq\vec{a}\cdot\vec{b}+q^2|\vec{b}|^2=p^2-pq+q^2$$

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(p\vec{a}+q\vec{b})=p|\vec{a}|^2+q\vec{a}\cdot\vec{b}=p-\frac{1}{2}q$$

すると，$|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$ から，$p^2-pq+q^2=1$ ……①，$p-\dfrac{1}{2}q=0$ ……②

①②より，$p^2-2p^2+4p^2=1$，$p^2=\dfrac{1}{3}$ となり，$p>0$ から，

$$p=\frac{1}{\sqrt{3}},\ q=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

(2) $\vec{x}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とおくと，$\vec{a}\cdot\vec{x}=s-\dfrac{1}{2}t$，$\vec{b}\cdot\vec{x}=-\dfrac{1}{2}s+t$ となる。

条件から，$-1\leqq\vec{a}\cdot\vec{x}\leqq1$，$1\leqq\vec{b}\cdot\vec{x}\leqq2$ なので，

$$-1\leqq s-\frac{1}{2}t\leqq1\ \cdots\cdots\cdots①,\ 1\leqq-\frac{1}{2}s+t\leqq2\ \cdots\cdots\cdots②$$

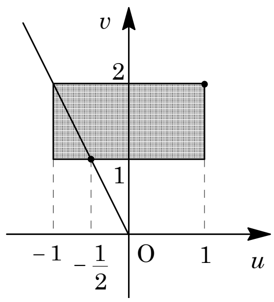
ここで，$u=s-\dfrac{1}{2}t$，$v=-\dfrac{1}{2}s+t$ とおくと，$s=\dfrac{2}{3}(2u+v)$，$t=\dfrac{2}{3}(u+2v)$

①②より，$-1\leqq u\leqq1$，$1\leqq v\leqq2$ ………③

さて，$|\vec{x}|^2=s^2-st+t^2$ なので，

$$|\vec{x}|^2=\frac{4}{9}\{(2u+v)^2-(2u+v)(u+2v)+(u+2v)^2\}$$

$$=\frac{4}{3}(u^2+uv+v^2)$$



すると，③は右図の網点部となるので，$(u,\ v)=(1,\ 2)$ のとき，$|\vec{x}|^2$ は最大値 $\dfrac{4}{3}(1+2+4)=\dfrac{28}{3}$ をとる。

また，$|\vec{x}|^2=\dfrac{4}{3}\left(u+\dfrac{1}{2}v\right)^2+v^2$ から，v をいったん固定すると，$|\vec{x}|^2$ が最小となるのは，$u=-\dfrac{1}{2}v$ $(v=-2u)$ のときであり，この関係を満たしながら，$1\leqq v\leqq2$ で v を変化させると，$(u,\ v)=\left(-\dfrac{1}{2},\ 1\right)$ で最小値 1 をとる。

以上より，$1\leqq|\vec{x}|^2\leqq\dfrac{28}{3}$ となり，$1\leqq|\vec{x}|\leqq\dfrac{2}{3}\sqrt{21}$ である。

［解 説］

成分表示を用いるか，そのまま 1 次結合で計算を進めるかを迷いましたが，後者の立場で記しました。なお，(2)の u，v への置き換えは，1 文字固定という方法で最大・最小を求めるときに，領域を長方形にしてわかりやすくするためです。