1　　解答解説のページへ

s, t を実数とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$x=s+t+1$，$y=s-t-1$ とおく。s，t が $s\geqq 0$，$t\geqq 0$ の範囲を動くとき，点 $(x,\ y)$ の動く範囲を座標平面内に図示せよ。

(2)　$x=st+s-t+1$，$y=s+t-1$ とおく。s，t が実数全体を動くとき，点 $(x,\ y)$ の動く範囲を座標平面内に図示せよ。

2

解答解説のページへ

m を実数とする。座標平面上で直線 $y=x$ に関する対称移動を表す 1 次変換を f とし，直線 $y=mx$ に関する対称移動を表す 1 次変換を g とする。以下の問いに答えよ。

(1)　1 次変換 g を表す行列 A を求めよ。

(2)　合成変換 $g\circ f$ を表す行列 B を求めよ。

(3)　$B^3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ となる m をすべて求めよ。

3

解答解説のページへ

袋 A, 袋 B のそれぞれに, 1 から N の自然数がひとつずつ書かれた N 枚のカードが入っている。これらのカードをよくかきまぜて取り出していく。以下の問いに答えよ。

(1)　$N=4$ とする。袋 A, B のそれぞれから同時に 1 枚ずつカードを取り出し, 数字が同じかどうかを確認する操作を繰り返す。ただし, 取り出したカードは元には戻さないものとする。4 回のカードの取り出し操作が終わった後, 数字が一致していた回数を X とする。$X=1$, $X=2$, $X=3$, $X=4$ となる確率をそれぞれ求めよ。また, X の期待値を求めよ。

(2)　$N=3$ とし, n は自然数とする。袋 A, B のそれぞれから同時に 1 枚ずつカードを取り出し, カードの数字が一致していたら, そのカードを取り除き, 一致していなかったら, 元の袋に戻すという操作を繰り返す。カードが初めて取り除かれるのが n 回目で起こる確率を p_n とし, n 回目の操作ですべてのカードが取り除かれる確率を q_n とする。p_n と q_n を求めよ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

$0 \leqq x \leqq \pi$ に対して，関数 $f(x)$ を，$f(x)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos|t-x|}{1+\sin|t-x|}dt$ と定める。$f(x)$ の $0 \leqq x \leqq \pi$ における最大値と最小値を求めよ。

5

解答解説のページへ

長さ 1 の線分 AB を直径とする円周 C 上に点 P をとる。ただし，点 P は点 A，B とは一致していないとする。線分 AB 上の点 Q を $\angle \mathrm{BPQ}=\dfrac{\pi}{3}$ となるようにとり，線分 BP の長さを x とし，線分 PQ の長さを y とする。以下の問いに答えよ。

(1) y を x を用いて表せ。

(2) 点 P が 2 点 A, B を除いた円周 C 上を動くとき，y が最大となる x を求めよ。

6　解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$を

$$a_1=1,\ a_{n+1}=\sqrt{\frac{3a_n+4}{2a_n+3}}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。以下の問いに答えよ。

(1)　$n\geqq 2$ のとき，$a_n>1$ となることを示せ。

(2)　$\alpha^2=\dfrac{3\alpha+4}{2\alpha+3}$ を満たす正の実数αを求めよ。

(3)　すべての自然数 n に対して $a_n<\alpha$ となることを示せ。

(4)　$0<r<1$ を満たすある実数 r に対して，不等式

$$\frac{\alpha-a_{n+1}}{\alpha-a_n}\leqq r\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立つことを示せ。さらに，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

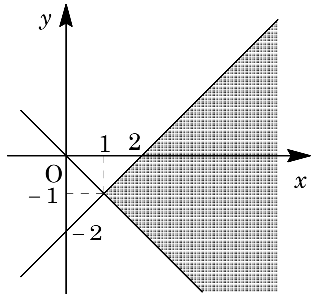
1

問題のページへ

(1)　条件から，$x=s+t+1$ ……①，$y=s-t-1$ ……②に対して，①②より，

$$2s=x+y\,,\ s=\frac{1}{2}(x+y)\ \cdots\cdots\cdots ③$$

$$2t+2=x-y\,,\ t=\frac{1}{2}(x-y-2)\ \cdots\cdots\cdots ④$$



$s\geqq 0$, $t\geqq 0$ から，③④より，

$$x+y\geqq 0\,,\ x-y-2\geqq 0$$

すると，点$(x,\ y)$の動く領域は右図の網点部となる。なお，境界線は領域に含む。

(2)　条件から，$x=st+s-t+1$ ……⑤，$y=s+t-1$ ……⑥に対して，

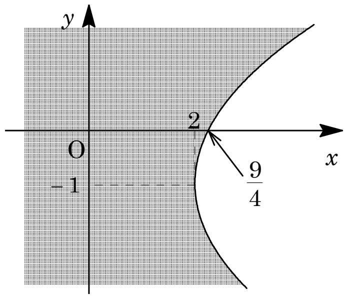
⑤より，$x=(s-1)(t+1)+2$，$(s-1)(t+1)=x-2$ ………⑦

⑥より，$y=(s-1)+(t+1)-1$，$(s-1)+(t+1)=y+1$ …………⑧

⑦⑧から，$s-1$，$t+1$ は u についての 2 次方程式$u^2-(y+1)u+x-2=0$の 2 つの解であり，これらが実数であることより，

$$D=(y+1)^2-4(x-2)\geqq 0$$

$$(y+1)^2\geqq 4(x-2)$$



s, t が実数全体を動くとき，$s-1$，$t+1$ も実数全体を動くので，点$(x,\ y)$の動く領域は右図の網点部となる。なお，境界線は領域に含む。

［解　説］

(2)は，1 文字を消去して実数解条件からも導けますが，少し式計算をして，対称式を持ち出しました。

2　問題のページへ

(1)　直線 $l: y = mx$ に関する対称移動を表す 1 次変換 g によって，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が点 $\mathrm{P}'(x',\ y')$ に移るとする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{PP}'} = (x'-x,\ y'-y)$ と直線 l の方向ベクトル $\vec{u} = (1,\ m)$ は垂直となるので，

$$\vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PP}'} = (x'-x) + m(y'-y) = 0\,,\ \ x' + my' = x + my \cdots\cdots\cdots①$$

また，線分 PP' の中点 $\left(\dfrac{x'+x}{2},\ \dfrac{y'+y}{2}\right)$ は，直線 l 上にあるので，

$$\frac{y'+y}{2} = m\cdot\frac{x'+x}{2}\,,\ \ -mx' + y' = mx - y \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\begin{pmatrix} 1 & m \\ -m & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となり，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m \\ -m & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & m \\ m & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1 & -m \\ m & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & m \\ m & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

よって，g を表す行列 A は，$A = \dfrac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}$

(2)　直線 $y = x$ に関する対称移動を表す 1 次変換 f を表す行列は，行列 A に $m = 1$ を当てはめて，$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ となる。

これより，合成変換 $g\circ f$ を表す行列 B は，

$$B = \frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 2m & 1-m^2 \\ m^2-1 & 2m \end{pmatrix}$$

(3)　(2)より，ハミルトン・ケーリーの定理を利用すると，単位行列を E として，

$$B^2 = \frac{4m}{1+m^2}B - \frac{4m^2+(1-m^2)^2}{(1+m^2)^2}E = \frac{4m}{1+m^2}B - E$$

$$B^3 = \frac{4m}{1+m^2}B^2 - B = \frac{4m}{1+m^2}\left(\frac{4m}{1+m^2}B - E\right) - B$$

$$= \left\{\left(\frac{4m}{1+m^2}\right)^2 - 1\right\}B - \frac{4m}{1+m^2}E$$

条件より，$B^3 = E$ なので，$\left\{\left(\dfrac{4m}{1+m^2}\right)^2 - 1\right\}B = \left(\dfrac{4m}{1+m^2} + 1\right)E \cdots\cdots\cdots③$

(i)　$\left(\dfrac{4m}{1+m^2}\right)^2 - 1 = 0$ のとき

③より $\dfrac{4m}{1+m^2} + 1 = 0$ となり，これは $\left(\dfrac{4m}{1+m^2}\right)^2 - 1 = 0$ を満たす。

すると，$m^2 + 4m + 1 = 0$ より，$m = -2\pm\sqrt{3}$ である。

(ii) $\left(\dfrac{4m}{1+m^2}\right)^2-1\neq 0$ のとき

③より, k を実数として, $B=kE$ となる。

$B^3=E$ に代入すると, $k^3=1$ から $k=1$ となり, $B=E$ から,

$$\frac{2m}{1+m^2}=1\cdots\cdots\cdots④,\ \ \frac{1-m^2}{1+m^2}=0\cdots\cdots\cdots⑤$$

⑤より $m=\pm 1$ となり, このうち④を満たすのは $m=1$ である。

(i)(ii)より, 求める m は, $m=1,\ -2\pm\sqrt{3}$

［解 説］

(3)は, 回転行列を対応させる方法もありますが, これは知識がないと思いつくものではありません。上の解答例は普通に計算したものです。

3

問題のページへ

(1)　与えられた試行に対して，A から取り出した数字と，B から取り出した数字が一致する回数を X とし，$X=i$ である確率を $P(i)$ とおく。

$X=4$ となるのは，A からの取り出し方に対する B からの取り出し方が 1 通りのときより，$P(4)=\dfrac{1}{4!}=\dfrac{1}{24}$ である。

$X=3$ となる場合はないので，$P(3)=0$ である。

$X=2$ となるのは，A からの取り出し方に対する B からの取り出し方が，一致する数字の対応が ${}_4\mathrm{C}_2$ 通り，それぞれに対し，一致しない数字の対応が 1 通りずつのときである。これより，$P(2)=\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2\cdot 1}{4!}=\dfrac{1}{4}$ である。

$X=1$ となるのは，A からの取り出し方に対する B からの取り出し方が，一致する数字の対応が ${}_4\mathrm{C}_1$ 通り，それぞれに対し，一致しない数字の対応が 2 通りずつのときである。これより，$P(1)=\dfrac{{}_4\mathrm{C}_1\cdot 2}{4!}=\dfrac{1}{3}$ である。

したがって，X の期待値は，$4\times\dfrac{1}{24}+2\times\dfrac{1}{4}+1\times\dfrac{1}{3}=1$ である。

(2)　与えられた試行に対して，カードの数字が一致する確率は $\dfrac{1}{3}$，一致しない確率は $\dfrac{2}{3}$ なので，n 回目でカードが初めて取り除かれる確率 p_n は，$n\geqq 2$ のとき，

$$p_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

これは，$n=1$ のときも成立している。

また，n 回目の操作ですべてのカードが取り除かれる確率 q_n は，$q_1=q_2=0$

$n\geqq 3$ のときは，k 回目 $(1\leqq k\leqq n-2)$ で初めてカードが 1 枚取り除かれ，$n-1$ 回目と n 回目に 1 枚ずつ取り除かれる場合である。カードが 2 枚のとき，数字が一致する確率は $\dfrac{1}{2}$，一致しない確率は $\dfrac{1}{2}$ なので，

$$q_n=\sum_{k=1}^{n-2}p_k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2-k}\cdot\frac{1}{2}=\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-k}=\sum_{k=1}^{n-2}\left(\frac{2}{3}\right)^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\sum_{k=1}^{n-2}\left(\frac{4}{3}\right)^{k}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\cdot\frac{\frac{4}{3}\left\{\left(\frac{4}{3}\right)^{n-2}-1\right\}}{\frac{4}{3}-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\left\{\left(\frac{4}{3}\right)^{n-2}-1\right\}$$

$$=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

［解 説］

頻出ですが，(2)は不注意によるミスをやってしまいがちな問題です。

$\boxed{4}$

問題のページへ

$0 \leqq x \leqq \pi$ に対して，$f(x)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos|t-x|}{1+\sin|t-x|}dt$ と定義すると，

(i)　$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$f(x)=\int_0^x \frac{\cos(t-x)}{1-\sin(t-x)}dt+\int_x^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(t-x)}{1+\sin(t-x)}dt$$

$$=\Big[-\log|1-\sin(t-x)|\Big]_0^x+\Big[\log|1+\sin(t-x)|\Big]_x^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\log|1-\sin(-x)|+\log\left|1+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right|$$

$$=\log(1+\sin x)+\log(1+\cos x)$$

これより，$f'(x)=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}+\dfrac{-\sin x}{1+\cos x}=\dfrac{\cos x+\cos^2 x-\sin x-\sin^2 x}{(1+\sin x)(1+\cos x)}$

$$=\frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x+1)}{(1+\sin x)(1+\cos x)}$$

(ii)　$\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi$ のとき

$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(t-x)}{1-\sin(t-x)}dt=\Big[-\log|1-\sin(t-x)|\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-\log\left|1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right|+\log|1-\sin(-x)|$$

$$=-\log(1-\cos x)+\log(1+\sin x)$$

これより，$f'(x)=-\dfrac{\sin x}{1-\cos x}+\dfrac{\cos x}{1+\sin x}=\dfrac{-\sin x-\sin^2 x+\cos x-\cos^2 x}{(1-\cos x)(1+\sin x)}$

$$=\frac{-\sin x+\cos x-1}{(1-\cos x)(1+\sin x)}$$

(i)(ii)より，$f(x)$ の増減は下表のようになる。

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$	$\log 2$	$\nearrow$	$2\log\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\searrow$	$\log 2$	$\searrow$	$-\log 2$

よって，最大値は $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=2\log\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，最小値は $f(\pi)=-\log 2$ である。

［解　説］

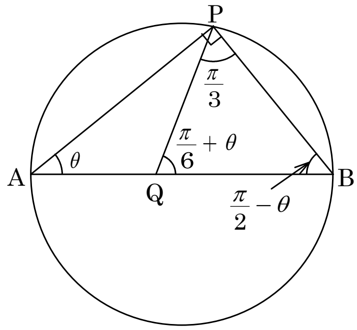
定積分の計算問題です。なお，$f'(x)$ の符号変化については，三角関数の合成をするまでもありません。

5

問題のページへ

(1)　$\mathrm{AB}=1$，$\mathrm{BP}=x$ に対し，$\angle\mathrm{PAB}=\theta$ とおくと，

$$\sin\theta=x\ ,\ \cos\theta=\sqrt{1-x^2}$$



さて，$\angle\mathrm{BPQ}=\dfrac{\pi}{3}$ から，$\angle\mathrm{APQ}=\dfrac{\pi}{6}$ となり，

$$\angle\mathrm{PQB}=\frac{\pi}{6}+\theta\ ,\ \angle\mathrm{PBQ}=\frac{\pi}{2}-\theta$$

$\mathrm{PQ}=y$ から，$\triangle\mathrm{PQB}$ に正弦定理を適用して，

$$\frac{y}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\frac{x}{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)}$$

よって，$y=\dfrac{x\cos\theta}{\sin\frac{\pi}{6}\cos\theta+\cos\frac{\pi}{6}\sin\theta}=\dfrac{2x\cos\theta}{\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}=\dfrac{2x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{3}x}$

(2)　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において, (1)より，$y=\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}=\dfrac{2}{\dfrac{1}{\sin\theta}+\dfrac{\sqrt{3}}{\cos\theta}}$

さて，$f(\theta)=\dfrac{1}{\sin\theta}+\dfrac{\sqrt{3}}{\cos\theta}$ とおくと，$y=\dfrac{2}{f(\theta)}$ となり，

$$f'(\theta)=-\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}+\frac{\sqrt{3}\sin\theta}{\cos^2\theta}=\frac{\sqrt{3}\sin^3\theta-\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

ここで，$\sqrt{3}\sin^3\alpha=\cos^3\alpha$ となる α をとると，$f(\theta)$ の増減は右表のようになり，$\theta=\alpha$ のとき $f(\theta)$ は最小となる。

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f(\theta)$		$\searrow$		$\nearrow$	

すなわち，$\theta=\alpha$ で, y は最大となる。

このとき，$\sqrt{3}x^3=\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3$ から，$3x^6=(1-x^2)^3$ となり，

$$\sqrt[3]{3}x^2=1-x^2\ ,\ (1+\sqrt[3]{3})x^2=1$$

したがって, y が最大となる x は，$x=\dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt[3]{3}}}$ である。

［解 説］

正弦定理の応用です。ただ, (2)は計算の工夫が必要です。特に，$f(\theta)$ を設定する部分が重要で, 何回か微分に詰まって考えつきます。

6

問題のページへ

(1) $n \geqq 2$ のとき，$a_n > 1$ であることを，数学的帰納法を用いて示す。

(i) $n = 2$ のとき　$a_1 = 1$ なので，$a_2 = \sqrt{\dfrac{3a_1+4}{2a_1+3}} = \sqrt{\dfrac{7}{5}} > 1$

(ii) $n = k$ のとき　$a_k > 1$ と仮定すると，

$$a_{k+1} - 1 = \sqrt{\frac{3a_k+4}{2a_k+3}} - 1 = \sqrt{1 + \frac{a_k+1}{2a_k+3}} - 1 > 0$$

(i)(ii)より，$n \geqq 2$ のとき，$a_n > 1$ である。

(2) $\alpha^2 = \dfrac{3\alpha+4}{2\alpha+3}$ より，$2\alpha^3 + 3\alpha^2 - 3\alpha - 4 = 0$ となり，$(\alpha+1)(2\alpha^2+\alpha-4) = 0$

$\alpha > 0$ より，$\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{33}}{4}$

(3) すべての自然数 n に対して $a_n < \alpha$ となることを，数学的帰納法を用いて示す。

(i) $n = 1$ のとき　$\alpha - a_1 = \dfrac{-1+\sqrt{33}}{4} - 1 = \dfrac{\sqrt{33}-5}{4} > 0$ より，$a_1 < \alpha$ が成り立つ。

(ii) $n = k$ のとき　$a_k < \alpha$ と仮定する。

$$\alpha - a_{k+1} = \sqrt{\frac{3\alpha+4}{2\alpha+3}} - \sqrt{\frac{3a_k+4}{2a_k+3}} = \frac{\sqrt{(3\alpha+4)(2a_k+3)} - \sqrt{(2\alpha+3)(3a_k+4)}}{\sqrt{2\alpha+3}\sqrt{2a_k+3}}$$

$$= \frac{(3\alpha+4)(2a_k+3) - (2\alpha+3)(3a_k+4)}{\sqrt{2\alpha+3}\sqrt{2a_k+3}\left\{\sqrt{(3\alpha+4)(2a_k+3)} + \sqrt{(2\alpha+3)(3a_k+4)}\right\}}$$

$$= \frac{\alpha - a_k}{\sqrt{2\alpha+3}\sqrt{2a_k+3}\left\{\sqrt{(3\alpha+4)(2a_k+3)} + \sqrt{(2\alpha+3)(3a_k+4)}\right\}}$$

よって，$\alpha - a_{k+1} > 0$ から，$a_{k+1} < \alpha$ である。

(i)(ii)より，すべての自然数 n に対して $a_n < \alpha$ である。

(4) (1)と(3)の結果より，$1 \leqq a_n < \alpha$ となり，

$$\frac{\alpha - a_{n+1}}{\alpha - a_n} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha+3}\sqrt{2a_n+3}\left\{\sqrt{(3\alpha+4)(2a_n+3)} + \sqrt{(2\alpha+3)(3a_n+4)}\right\}}$$

$$\leqq \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{5}\left(\sqrt{35}+\sqrt{35}\right)} = \frac{1}{10\sqrt{35}}$$

すると，$r = \dfrac{1}{10\sqrt{35}}$ とすることができ，このとき，$\alpha - a_{n+1} \leqq r(\alpha - a_n)$ なので，

$$0 < \alpha - a_n \leqq (\alpha - a_1)r^{n-1} = (\alpha - 1)r^{n-1}$$

よって，$0 < r < 1$ から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\alpha - a_n) = 0$，すなわち $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha = \frac{-1+\sqrt{33}}{4}$

［解 説］

漸化式と極限についての頻出問題です。なお，誘導はていねいです。