1　解答解説のページへ

a を実数とする。以下の問いに答えよ。

(1)　2 次方程式 $x^2-2(a+1)x+3a=0$ が，$-1 \leqq x \leqq 3$ の範囲に 2 つの異なる実数解をもつような a の値の範囲を求めよ。

(2)　a が(1)で求めた範囲を動くとき，放物線 $y=x^2-2(a+1)x+3a$ の頂点の y 座標が取りうる値の範囲を求めよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

四面体 OABC において，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=1$ とする。$\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$，$\angle\mathrm{BOC}=45^\circ$，$\angle\mathrm{COA}=45^\circ$ とし，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく。点 C から面 OAB に垂線を引き，その交点を H とする。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) CH の長さを求めよ。

(3) 四面体 OABC の体積を求めよ。

3　解答解説のページへ

A, B の 2 人が，サイコロを 1 回ずつ交互に投げるゲームを行う。自分の出したサイコロの目を合計して先に 6 以上になった方を勝ちとし，その時点でゲームを終了する。A から投げ始めるものとし，以下の問いに答えよ。

(1)　B がちょうど 1 回投げて B が勝ちとなる確率を求めよ。

(2)　B がちょうど 2 回投げて B が勝ちとなる確率を求めよ。

(3)　B がちょうど 2 回投げて，その時点でゲームが終了していない確率を求めよ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

　t は $0 \leqq t \leqq 1$ を満たす実数とする。放物線 $y=x^2$，直線 $x=1$，および x 軸とで囲まれた図形を A，放物線 $y=4(x-t)^2$ と直線 $y=1$ とで囲まれた図形を B とする。A と B の共通部分の面積を $S(t)$ とする。

(1)　$S(t)$ を求めよ。

(2)　$0 \leqq t \leqq 1$ における $S(t)$ の最大値を求めよ。

1　問題のページへ

(1)　2 次方程式$x^2-2(a+1)x+3a=0$……①に対して,

$$f(x)=x^2-2(a+1)x+3a=(x-a-1)^2-a^2+a-1$$

さて，①が$-1\leqq x\leqq 3$の範囲に 2 つの異なる実数解をもつ条件は,

$-a^2+a-1<0$………②，$-1<a+1<3$………③

$f(-1)=5a+3\geqq 0$………④，$f(3)=-3a+3\geqq 0$………⑤

②より$a^2-a+1>0$となり，$\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$から，つねに成立する。

③より$-2<a<2$，④より$a\geqq -\frac{3}{5}$，⑤より$a\leqq 1$となる。

よって，求める条件は，$-\frac{3}{5}\leqq a\leqq 1$

(2)　放物線$y=f(x)$の頂点のy座標は,

$$y=-a^2+a-1=-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}$$

すると，$-\frac{3}{5}\leqq a\leqq 1$において，$a=\frac{1}{2}$のとき最大値$-\frac{3}{4}$をとり，$a=-\frac{3}{5}$のとき最小値$-\frac{49}{25}$をとる。

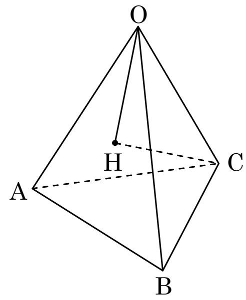
これより，yの取りうる値の範囲は，$-\frac{49}{25}\leqq y\leqq -\frac{3}{4}$である。

［解　説］

2 次方程式の解の配置の定型的な問題です。なお，(1)は定数分離も考えましたが，(2)の設問から普通に解きました。

2

問題のページへ



(1)　条件より，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot1\cdot\cos60^\circ=\dfrac{1}{2}$

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cdot\cos45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

さて，点 H は平面 OAB 上にあるので，s, t を実数とし，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{b}$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c}$ となり，条件から $\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ は平面 OAB に垂直なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\vec{a}=s+\frac{1}{2}t-\frac{\sqrt{2}}{2}=0,\quad \overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}s+t-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$$

これより，$s=t=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\vec{a}+\dfrac{\sqrt{2}}{3}\vec{b}$

(2)　(1)より，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\vec{a}+\dfrac{\sqrt{2}}{3}\vec{b}-\vec{c}$ となり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2+(-1)^2+2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{2}-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+1+\frac{2}{9}-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

よって，$\mathrm{CH}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である。

(3)　$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ より，四面体 OABC の体積 V は，(2)より，

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{12}$$

［解　説］

空間ベクトルの図形への応用についての基本題です。詳しすぎるぐらいの誘導がついています。なお，対称性に着目した方法も可能です。

3

問題のページへ

(1)　A→B と投げて B が勝ちとなるのは, A が 5 以下の目を出し, B が 6 の目を出す場合になるので，この確率は,

$$\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{5}{36}$$

(2)　右表は，一番左側の列が 1 回目の目，一番上側の行が 2 回目の目であり，それらの目とその和との関係を表したものである。

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

さて, A→B→A→B と投げて B が勝ちとなるのは，まず A は 1 回目と 2 回目の目の和が 5 以下であり，右表から 10 通りの場合がある。さらに, B は 1 回目の目が 5 以下で 2 回目を投げ，1 回目との目の和が 6 以上であり，これは右表から 20 通りの場合がある。よって，この確率は,

$$\frac{10}{36}\times\frac{20}{36}=\frac{25}{162}$$

(3)　A→B→A→B と投げてゲームが終了しないのは, A, B とも 1 回目と 2 回目の目の和が 5 以下であり, 10 通りずつの場合がある。よって，この確率は,

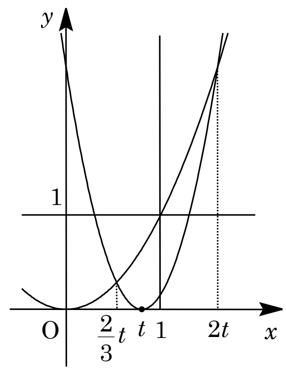
$$\frac{10}{36}\times\frac{10}{36}=\frac{25}{324}$$

［解　説］

確率の基本題ですが，センター試験風に表を作ってしまえば，その後の計算はほとんど不要です。

4

問題のページへ



(1)　放物線 $y=x^2$ と放物線 $y=4(x-t)^2$ の式を連立して交点の x 座標を求めると，

$$x^2=4(x-t)^2,\ \{x+2(x-t)\}\{x-2(x-t)\}=0$$

よって，$x=\frac{2}{3}t,\ 2t$ となる。

さて，$0\leqq t\leqq 1$ より，$0\leqq\frac{2}{3}t\leqq\frac{2}{3}$，$0\leqq 2t\leqq 2$ となり，$2t$ と 1 との大小で場合分けをすると，$S(t)$ は，

(i)　$2t<1\left(0\leqq t<\frac{1}{2}\right)$ のとき

$$S(t)=\int_{\frac{2}{3}t}^{2t}\{x^2-4(x-t)^2\}dx=\int_{\frac{2}{3}t}^{2t}-3\Big(x-\frac{2}{3}t\Big)(x-2t)\,dx$$

$$=(-3)\cdot\Big(-\frac{1}{6}\Big)\Big(2t-\frac{2}{3}t\Big)^3=\frac{32}{27}t^3$$

(ii)　$2t\geqq 1\left(\frac{1}{2}\leqq t\leqq 1\right)$ のとき

$$S(t)=\int_{\frac{2}{3}t}^{1}\{x^2-4(x-t)^2\}dx=\int_{\frac{2}{3}t}^{1}(-3x^2+8tx-4t^2)\,dx$$

$$=\Big[-x^3+4tx^2-4t^2x\Big]_{\frac{2}{3}t}^{1}=-\Big(1-\frac{8}{27}t^3\Big)+4t\Big(1-\frac{4}{9}t^2\Big)-4t^2\Big(1-\frac{2}{3}t\Big)$$

$$=\frac{32}{27}t^3-4t^2+4t-1$$

(2)　(i)　$0\leqq t<\frac{1}{2}$ のとき　$S(t)=\frac{32}{27}t^3$ より単調に増加する。

(ii)　$\frac{1}{2}\leqq t\leqq 1$ のとき　$S(t)=\frac{32}{27}t^3-4t^2+4t-1$ より，

$$S'(t)=\frac{32}{9}t^2-8t+4$$

$$=\frac{4}{9}(4t-3)(2t-3)$$

すると，$S(t)$ の増減は右表のようになり，$t=\frac{3}{4}$ のとき極大値 $\frac{1}{4}$ をとる。

t	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}$	$\cdots$	1
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$	$\frac{4}{27}$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	

(i)(ii)より，$S(t)$ は $t=\frac{1}{2}$ において連続なので，$t=\frac{3}{4}$ のとき最大値 $\frac{1}{4}$ をとる。

［解 説］

定積分と面積に関する基本的な問題です。場合分けも煩雑ではありません。