1　解答解説のページへ

k を実数とする。3 次式 $f(x)=x^3-kx^2-1$ に対し，方程式 $f(x)=0$ の 3 つの解を α，β，γ とする。$g(x)$ は x^3 の係数が 1 である 3 次式で，方程式 $g(x)=0$ の 3 つの解が $\alpha\beta$，$\beta\gamma$，$\gamma\alpha$ であるものとする。

(1)　$g(x)$ を k を用いて表せ。

(2)　2 つの方程式 $f(x)=0$ と $g(x)=0$ が共通の解をもつような k の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

四面体 OABC において，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=1$ とする。$\angle\mathrm{AOB}=60°$，$\angle\mathrm{BOC}=45°$，$\angle\mathrm{COA}=45°$ とし，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく。点 C から面 OAB に垂線を引き，その交点を H とする。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) CH の長さを求めよ。

(3) 四面体 OABC の体積を求めよ。

3

解答解説のページへ

A, B の 2 人が，サイコロを 1 回ずつ交互に投げるゲームを行う。自分の出したサイコロの目を合計して先に 6 以上になった方を勝ちとし，その時点でゲームを終了する。A から投げ始めるものとし，以下の問いに答えよ。

(1) A がちょうど 2 回投げて A が勝ちとなる確率を求めよ。

(2) B がちょうど 2 回投げて B が勝ちとなる確率を求めよ。

(3) B がちょうど 3 回投げて，その時点でゲームが終了していない確率を求めよ。

$\boxed{4}$　解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$を

$$a_n = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n\sin\theta}\,d\theta,\ \ b_n = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n\sin\theta}\cos\theta\,d\theta \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。ただし，eは自然対数の底とする。

(1)　一般項b_nを求めよ。

(2)　すべてのnについて，$b_n \leqq a_n \leqq \dfrac{2}{\sqrt{3}}b_n$が成り立つことを示せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(na_n)$を求めよ。ただし，対数は自然対数とする。

5

解答解説のページへ

2 次の正方行列 A を$A=\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$で定める。$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，点 $\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)$ を関係式

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。ただし，$x_0=1$，$y_0=0$ とする。

(1)　A^4 を求めよ。

(2)　$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ に対して，

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = (E-A^{n+1})(E-A)^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つことを示せ。ただし，E は 2 次の単位行列とする。

(3)　原点 O から P_n までの距離 OP_n が最大となる n を求めよ。

6

解答解説のページへ

半径 1 の円を底面とする高さ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の直円柱がある。底面の円の中心を O とし，直径を 1 つ取り AB とおく。AB を含み底面と $45°$ の角度をなす平面でこの直円柱を 2 つの部分に分けるとき，体積の小さい方の部分を V とする。

(1) 直径 AB と直交し，O との距離が t $(0 \leqq t \leqq 1)$ であるような平面で V を切ったときの断面積 $S(t)$ を求めよ。

(2) V の体積を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$f(x)=x^3-kx^2-1$ に対し，$f(x)=0$ の 3 つの解を α，β，γ なので，

$$\alpha+\beta+\gamma=k,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0,\ \alpha\beta\gamma=1$$

ここで，条件から，$g(x)=(x-\alpha\beta)(x-\beta\gamma)(x-\gamma\alpha)$ より，

$$\begin{aligned}g(x)&=x^3-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x^2+(\alpha\beta^2\gamma+\alpha\beta\gamma^2+\alpha^2\beta\gamma)x-\alpha^2\beta^2\gamma^2\\&=x^3-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x^2+\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)x-(\alpha\beta\gamma)^2=x^3+kx-1\end{aligned}$$

(2)　$f(x)=0$ と $g(x)=0$ が共通の解をもつとき，その解は $\alpha\beta\gamma\neq 0$ より，いずれも 0 ではない。さて，共通の解を $x=\alpha\beta$ とすると，

(i)　$\alpha\beta=\alpha$ のとき

$\alpha\neq 0$ から $\beta=1$ となり，$f(1)=1-k-1=0$ から，$k=0$ である。

(ii)　$\alpha\beta=\beta$ のとき

$\beta\neq 0$ から $\alpha=1$ となり，$f(1)=0$ から $k=0$ である。

(iii)　$\alpha\beta=\gamma$ のとき

$\alpha\beta\gamma=1$ から $\gamma^2=1$ となり，$\gamma=1$ のときは，$f(1)=0$ から $k=0$ である。

また，$\gamma=-1$ のときは，$f(-1)=-1-k-1=0$ から，$k=-2$ である。

(i)(ii)(iii)より，$k=0,\ -2$ である。

逆に，$k=0$ のとき，$f(x)=g(x)=x^3-1$ となり，共通の解を 3 つもつ。

$k=-2$ のとき，$f(x)=x^3+2x^2-1=(x+1)(x^2+x-1)$

$$g(x)=x^3-2x-1=(x+1)(x^2-x-1)$$

すると，共通の解は 1 つ存在する。

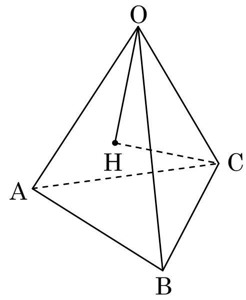
以上より，共通の解が $\beta\gamma$，$\gamma\alpha$ でも同様なので，求める値は $k=0,\ -2$ である。

［解 説］

(2)は，解を直接的に扱いました。また，定型的な解法もあります。

$\boxed{2}$

問題のページへ



(1)　条件より，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot1\cdot\cos60^\circ=\dfrac{1}{2}$

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cdot\cos45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

さて，点 H は平面 OAB 上にあるので，s, t を実数とし，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{b}$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c}$ となり，条件から $\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ は平面 OAB に垂直なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\vec{a}=s+\frac{1}{2}t-\frac{\sqrt{2}}{2}=0\,,\ \ \overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}s+t-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$$

これより，$s=t=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\vec{a}+\dfrac{\sqrt{2}}{3}\vec{b}$

(2)　(1)より，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\vec{a}+\dfrac{\sqrt{2}}{3}\vec{b}-\vec{c}$ となり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2+(-1)^2+2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{2}-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+1+\frac{2}{9}-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

よって，$\mathrm{CH}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である。

(3)　$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ より，四面体 OABC の体積 V は，(2)より，

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{12}$$

［解　説］

空間ベクトルの図形への応用についての基本題です。詳しすぎるぐらいの誘導がついています。なお，対称性に着目した方法も可能です。

3

問題のページへ

(1) 右表は，一番左側の列が 1 回目の目，一番上側の行が 2 回目の目であり，それらの目とその和との関係を表したものである。

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

さて，A→B→A と投げて A が勝ちとなるのは，まず B は 5 以下の目を出す。A は 1 回目の目が 5 以下で 2 回目を投げ，1 回目との目の和が 6 以上を出すときになり，右表から 20 通りの場合がある。よって，この確率は，

$$\frac{5}{6}\times\frac{20}{36}=\frac{25}{54}$$

(2) A→B→A→B と投げて B が勝ちとなるのは，まず A は 1 回目と 2 回目の目の和が 5 以下であり，右上表から 10 通りの場合がある。さらに，B は 1 回目の目が 5 以下で 2 回目を投げ，1 回目との目の和が 6 以上であり，これは右上表から 20 通りの場合がある。よって，この確率は，

$$\frac{10}{36}\times\frac{20}{36}=\frac{25}{162}$$

(3) A→B→A→B→A→B と投げてゲームが終了しないのは，A，B とも 1 回目と 2 回目と 3 回目の目の和が 5 以下である。

(i) 1 回目の目が 1 のとき

(2 回目, 3 回目)＝(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)

(ii) 1 回目の目が 2 のとき

(2 回目, 3 回目)＝(1, 1), (1, 2), (2, 1)

(iii) 1 回目の目が 3 のとき

(2 回目, 3 回目)＝(1, 1)

(i)(ii)(iii)より，合わせて，$6+3+1=10$ 通りの場合がある。

したがって，求める確率は，

$$\frac{10}{216}\times\frac{10}{216}=\frac{25}{11664}$$

［解 説］

確率の基本題ですが，センター試験風に表を作ってしまえば，その後の計算はほとんど不要です。なお，文系に類題が出ています。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1) $b_n=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n\sin\theta}\cos\theta\,d\theta=\left[\frac{1}{n}e^{n\sin\theta}\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{n}\left(e^{\frac{n}{2}}-e^{-\frac{n}{2}}\right)$

(2) $-\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{6}$において，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq\cos\theta\leqq1$であり，$e^{n\sin\theta}>0$から，

$$\frac{\sqrt{3}}{2}e^{n\sin\theta}\leqq e^{n\sin\theta}\cos\theta\leqq e^{n\sin\theta}\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，①の各辺を$\theta=-\dfrac{\pi}{6}$から$\theta=\dfrac{\pi}{6}$まで積分すると，

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n\sin\theta}d\theta\leqq\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n\sin\theta}\cos\theta\,d\theta\leqq\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n\sin\theta}d\theta$$

よって，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}a_n\leqq b_n\leqq a_n$となり，$b_n\leqq a_n\leqq\dfrac{2}{\sqrt{3}}b_n$である。

(3) (1)(2)より，$nb_n\leqq na_n\leqq\dfrac{2}{\sqrt{3}}nb_n$となり，$e^{\frac{n}{2}}-e^{-\frac{n}{2}}\leqq na_n\leqq\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(e^{\frac{n}{2}}-e^{-\frac{n}{2}}\right)$から，

$$\frac{1}{n}\log\left(e^{\frac{n}{2}}-e^{-\frac{n}{2}}\right)\leqq\frac{1}{n}\log(na_n)\leqq\frac{1}{n}\log\frac{2}{\sqrt{3}}\left(e^{\frac{n}{2}}-e^{-\frac{n}{2}}\right)\cdots\cdots\cdots②$$

さて，$n\to\infty$のとき，

$$\frac{1}{n}\log\left(e^{\frac{n}{2}}-e^{-\frac{n}{2}}\right)=\frac{1}{n}\log e^{\frac{n}{2}}(1-e^{-n})=\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{2}+\frac{1}{n}\log(1-e^{-n})\to\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{n}\log\frac{2}{\sqrt{3}}\left(e^{\frac{n}{2}}-e^{-\frac{n}{2}}\right)=\frac{1}{n}\log\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{n}\log\left(e^{\frac{n}{2}}-e^{-\frac{n}{2}}\right)\to0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

よって，②より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(na_n)=\frac{1}{2}$

［解　説］

不等式を証明し，はさみうちの原理から極限へとつなぐ典型題です。

5

問題のページへ

(1)　$A=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\frac{3}{4}\pi & -\sin\frac{3}{4}\pi \\ \sin\frac{3}{4}\pi & \cos\frac{3}{4}\pi\end{pmatrix}$より，$A$ は原点を中心とする$\frac{3}{4}\pi$の回転を表す。これより，A^4 は原点を中心とする$4\times\frac{3}{4}\pi=3\pi$の回転を表すので，

$$A^4=\begin{pmatrix}\cos 3\pi & -\sin 3\pi \\ \sin 3\pi & \cos 3\pi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

(2)　$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ に対して，$\begin{pmatrix}x_n \\ y_n\end{pmatrix}=(E-A^{n+1})(E-A)^{-1}\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}$ ……①が成立することを，数学的帰納法を用いて証明する。

(i)　$n=0$ のとき　$\begin{pmatrix}x_0 \\ y_0\end{pmatrix}=(E-A^1)(E-A)^{-1}\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}=E\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}$

よって，$x_0=1$，$y_0=0$ より成立している。

(ii)　$n=k$ のとき　$\begin{pmatrix}x_k \\ y_k\end{pmatrix}=(E-A^{k+1})(E-A)^{-1}\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}$が成立すると仮定。

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x_{k+1} \\ y_{k+1}\end{pmatrix}&=A\begin{pmatrix}x_k \\ y_k\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}=A(E-A^{k+1})(E-A)^{-1}\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}\\&=\{(A-A^{k+2})(E-A)^{-1}+E\}\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}\\&=\{(A-A^{k+2})(E-A)^{-1}+(E-A)(E-A)^{-1}\}\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}\\&=(A-A^{k+2}+E-A)(E-A)^{-1}\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}=(E-A^{k+2})(E-A)^{-1}\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，0 以上の整数 n に対して①は成立する。

(3)　まず，$E-A^{n+1}=(E+A+A^2+\cdots+A^n)(E-A)$ より，

$$(E-A^{n+1})(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^n$$

すると，①から，$\begin{pmatrix}x_n \\ y_n\end{pmatrix}=(E+A+A^2+\cdots+A^n)\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}$ ………②

さて，(1)より，$A^4=-E$ から $A^8=E$ となり，以降，$A^9=A$，$A^{10}=A^2$，……となり，A^n は周期 8 の行列である。

そこで，$a=\frac{1}{\sqrt{2}}$ とおくと，

$$E\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a \\ a\end{pmatrix},\ A^2\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 \\ -1\end{pmatrix},\ A^3\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a \\ a\end{pmatrix}$$

$$A^4\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 \\ 0\end{pmatrix},\ A^5\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a \\ -a\end{pmatrix},\ A^6\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix},\ A^7\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a \\ -a\end{pmatrix}$$

すると，②より，$n=0,\ 2,\ \cdots,\ 7$ に対して，点列 $\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)$ は,

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-a \\ a \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-a \\ -1+a \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1+2a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -1+2a \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} x_5 \\ y_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ -1+a \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} x_6 \\ y_6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} x_7 \\ y_7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

原点 O から P_n までの距離 OP_n は,

$$\mathrm{OP}_0{}^2=1,\ \mathrm{OP}_1{}^2=1-2a+2a^2=2-\sqrt{2},\ \mathrm{OP}_2{}^2=2-4a+2a^2=3-2\sqrt{2}$$

$$\mathrm{OP}_3{}^2=2-4a+4a^2=4-2\sqrt{2},\ \mathrm{OP}_4{}^2=1-4a+4a^2=3-2\sqrt{2}$$

$$\mathrm{OP}_5{}^2=1-2a+2a^2=2-\sqrt{2},\ \mathrm{OP}_6{}^2=2a^2=1,\ \mathrm{OP}_7{}^2=0$$

これより OP_3 が最大となり，点列 $\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)$ も周期 8 であるので，OP_n が最大となる n は, k を 0 以上の整数として，$n=8k+3$ となる。

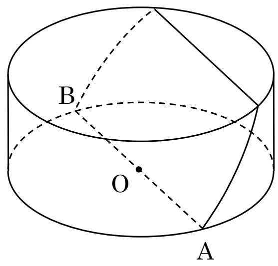
［解 説］

(2)は漸化式を解く方法もありますが，上の解答例では数学的帰納法を利用しました。ただ，$(E-A^{n+1})(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^n$ については，ピンときてほしいところです。なお, 計算量はかなり多めです。

6

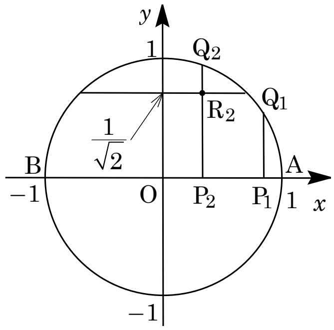
問題のページへ

(1) 半径 1 の円を底面とする高さ$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$の直円柱を，底面の直径 AB を含み底面と$45°$の角度をなす平面で切断したときできる部分のうち，体積の小さい方をVとする。



さて，点 O を原点，A(1, 0, 0)，B(−1, 0, 0)とおく。さらに，直径 AB 上に$0 \leqq t \leqq 1$として点$P(t,\ 0,\ 0)$をとり，P を通り AB と直交する平面で立体Vを切断する。

(i) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq t \leqq 1$のとき



$P_1(t,\ 0,\ 0)$，$Q_1(t,\ \sqrt{1-t^2},\ 0)$とおくと，切り口は，直角をはさむ辺の長さが$P_1Q_1=\sqrt{1-t^2}$の直角二等辺三角形となり，その面積$S(t)$は，

$$S(t)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-t^2}\right)^2=\frac{1}{2}(1-t^2)$$

(ii) $0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$のとき

$P_2(t,\ 0,\ 0)$，$Q_2(t,\ \sqrt{1-t^2},\ 0)$，$R_2\left(t,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)$とおくと，切り口は，上底の長さ$R_2Q_2=\sqrt{1-t^2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，下底の長さ$P_2Q_2=\sqrt{1-t^2}$，高さ$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$の台形となり，その面積$S(t)$は，

$$S(t)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-t^2}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{1-t^2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{4}$$

(2) Vの体積をWとおくと，対称性より，

$$\begin{aligned}
W&=2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{4}\right)dt+2\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\frac{1}{2}(1-t^2)\,dt\\
&=\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sqrt{1-t^2}\,dt-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}dt+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}(1-t^2)\,dt\\
&=\sqrt{2}\left\{\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}-\frac{1}{2\sqrt{2}}+\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\\
&=\frac{\sqrt{2}}{8}\pi-\frac{5}{12}\sqrt{2}+\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

［解　説］

教科書などでよく見かけるタイプですが，本問では，低い直円柱という「ひねり」が加わっています。