1

解答解説のページへ

曲線 $C : y = x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における接線を l_1，点 $\mathrm{Q}(b,\ b^2)$ における接線を l_2 とする。ただし，$a < b$ とする。l_1 と l_2 の交点を R とし，線分 PR，線分 QR および曲線 C で囲まれる図形の面積を S とする。

(1) R の座標を a と b を用いて表せ。

(2) S を a と b を用いて表せ。

(3) l_1 と l_2 が垂直であるときの S の最小値を求めよ。

2

解答解説のページへ

1, 2, 3, 4, 5 のそれぞれの数字が書かれた玉が 2 個ずつ，合計 10 個ある。

(1)　10 個の玉を袋に入れ，よくかき混ぜて 2 個の玉を取り出す。書かれている 2 つの数字の積が 10 となる確率を求めよ。

(2)　10 個の玉を袋に入れ，よくかき混ぜて 4 個の玉を取り出す。書かれている 4 つの数字の積が 100 となる確率を求めよ。

(3)　10 個の玉を袋に入れ，よくかき混ぜて 6 個の玉を順に取り出す。1 個目から 3 個目の玉に書かれている 3 つの数字の積と，4 個目から 6 個目の玉に書かれている 3 つの数字の積が等しい確率を求めよ。

3

解答解説のページへ

t を正の実数とする。三角形 OAB の辺 OA を $2:1$ に内分する点を M, 辺 OB を $t:1$ に内分する点を N とする。線分 AN と線分 BM の交点を P とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ および t を用いて表せ。

(2) 直線 OP は線分 BM と直交し, かつ $\angle\mathrm{AOB}$ の二等分線であるとする。このとき, 辺 OA と辺 OB の長さの比と t の値を求めよ。

4

解答解説のページへ

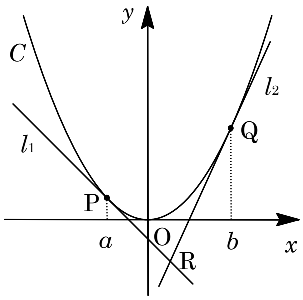
実数 x, y に対して，$A = 2\sin x + \sin y$，$B = 2\cos x + \cos y$ とおく。

(1) $\cos(x-y)$ を A, B を用いて表せ。

(2) x, y が $A = 1$ を満たしながら変化するとき, B の最大値と最小値, およびそのときの $\sin x$，$\cos x$ の値を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　$y=x^2$ より，$y'=2x$ となり，点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における接線 l_1 は,

$$y-a^2=2a(x-a),\ y=2ax-a^2\ \cdots\cdots\cdots①$$

同様に，点 $\mathrm{Q}(b,\ b^2)$ における接線 l_2 は,

$$y=2bx-b^2\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②を連立して，$2ax-a^2=2bx-b^2$

$$2(b-a)x=b^2-a^2,\ x=\frac{a+b}{2}$$

①より $y=2a\cdot\dfrac{a+b}{2}-a^2=ab$ となり，l_1 と l_2 の交点 R は，$\mathrm{R}\left(\dfrac{a+b}{2},\ ab\right)$ である。

(2)　線分 PR, 線分 QR および曲線 C で囲まれる図形の面積 S は,

$$S=\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x^2-2ax+a^2)dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b(x^2-2bx+b^2)dx$$

$$=\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)^2dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b(x-b)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-a)^3\right]_a^{\frac{a+b}{2}}+\left[\frac{1}{3}(x-b)^3\right]_{\frac{a+b}{2}}^b=\frac{1}{3}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3-\frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^3$$

$$=\frac{1}{12}(b-a)^3$$

(3)　l_1 と l_2 が垂直であるとき，$2a\cdot 2b=-1$，$a=-\dfrac{1}{4b}$ である。

すると，$a<b$ から $a<0<b$ となり，相加平均と相乗平均の関係から,

$$S=\frac{1}{12}\left(b+\frac{1}{4b}\right)^3\geqq\frac{1}{12}\left(2\sqrt{b\cdot\frac{1}{4b}}\right)^3=\frac{1}{12}$$

等号成立は，$b=\dfrac{1}{4b}\ \left(b=\dfrac{1}{2}\right)$ のときとなり，このとき S は最小値 $\dfrac{1}{12}$ をとる。

［解　説］

センター試験や 2 次試験，また参考書の例題で，よく見かける超頻出問題です。

2　　問題のページへ

(1)　10 個の玉から 2 個を取り出す${}_{10}\mathrm{C}_2 = 45$通りの場合が同様に確からしいとする。

さて，書かれている 2 つの数字の積が 10 となるのは，$10 = 2\times 5$ より，${}_2\mathrm{C}_1 \times {}_2\mathrm{C}_1 = 4$ 通りの場合があり，その確率は$\dfrac{4}{45}$である。

(2)　10 個の玉から 4 個を取り出す${}_{10}\mathrm{C}_4 = 210$通りの場合が同様に確からしいとする。

さて，書かれている 4 つの数字の積が 100 となるのは，$100 = 2^2\times 5^2$ より，次の 2 つの場合がある。

(i)　4 つの数字が$(2,\ 2,\ 5,\ 5)$の場合　1 通り

(ii)　4 つの数字が$(1,\ 4,\ 5,\ 5)$の場合　${}_2\mathrm{C}_1 \times {}_2\mathrm{C}_1 = 4$ 通り

(i)(ii)より，求める確率は，$\dfrac{1+4}{210} = \dfrac{1}{42}$ である。

(3)　10 個の玉から 6 個を順に取り出す${}_{10}\mathrm{P}_6$通りの場合が同様に確からしいとする。

さて，1 個目から 3 個目，4 個目から 6 個目に書かれている数字の組合せを，それぞれA, Bとすると，Aの 3 つの数字の積とBの 3 つの数字の積が等しい場合は，

(i)　$A = B$のとき

数字の選び方が${}_5\mathrm{C}_3$通り，A, B への数字の振り分けが2^3通り，出る順序が$3!\times 3!$通りより，${}_5\mathrm{C}_3\times 2^3\times 3!\times 3! = 5\times 2^4\times(3!)^2$通りである。

(ii)　$A = (2,\ 2,\ 3)$, $B = (1,\ 4,\ 3)$，または$A = (1,\ 4,\ 3)$, $B = (2,\ 2,\ 3)$のとき

A, B への数字の振り分けが$2\times 2^2 = 2^3$通り，出る順序が$3!\times 3!$通りより，$(2^3\times 3!\times 3!)\times 2 = 2^4\times(3!)^2$通りである。

(iii)　$A = (2,\ 2,\ 5)$, $B = (1,\ 4,\ 5)$，または$A = (1,\ 4,\ 5)$, $B = (2,\ 2,\ 5)$のとき

(ii)と同様に，$(2^3\times 3!\times 3!)\times 2 = 2^4\times(3!)^2$通りである。

(i)～(iii)より，求める確率は，

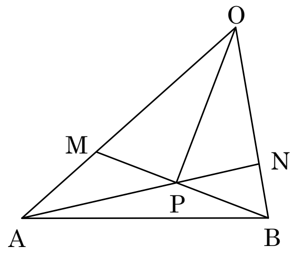
$$\frac{(5+1+1)\times 2^4\times(3!)^2}{{}_{10}\mathrm{P}_6} = \frac{7\times 2^4\times(3!)^2}{10\times 9\times 8\times 7\times 6\times 5} = \frac{2}{75}$$

［解　説］

$2\times 2 = 1\times 4$ に注目するために(2)の設問があり，それが(3)へとつながっています。注意深さの要求される問題です。

3

問題のページへ



(1)　△OAN と直線 BM について，メネラウスの定理を適用すると，$\dfrac{\mathrm{OM}}{\mathrm{MA}}\cdot\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PN}}\cdot\dfrac{\mathrm{NB}}{\mathrm{BO}}=1$ である。

条件より，$\mathrm{OM}:\mathrm{MA}=2:1$，$\mathrm{ON}:\mathrm{NB}=t:1$ なので，

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PN}}=\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{OM}}\cdot\frac{\mathrm{BO}}{\mathrm{NB}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{t+1}{1}=\frac{t+1}{2}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{(t+1)+2}\{2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(t+1)\overrightarrow{\mathrm{ON}}\}$

$$=\frac{1}{t+3}\left\{2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(t+1)\cdot\frac{t}{t+1}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right\}=\frac{1}{t+3}(2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$

(2)　△OMB において，$\mathrm{OP}\perp\mathrm{BM}$ かつ $\angle\mathrm{MOP}=\angle\mathrm{BOP}$ より，$\mathrm{OM}=\mathrm{OB}$ となり，

$$\frac{2}{3}\mathrm{OA}=\mathrm{OB},\ \ \mathrm{OA}:\mathrm{OB}=3:2$$

また，点 P は MB の中点であるので，(1)より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{t+3}\left(2\cdot\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OM}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=\frac{1}{t+3}(3\overrightarrow{\mathrm{OM}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$

よって，$\dfrac{3}{t+3}=\dfrac{t}{t+3}=\dfrac{1}{2}$ から，$t=3$ である。

［解　説］

平面ベクトルの基本問題です。解答例では，メネラウスの定理を利用しましたが，必須というわけではありません。

4

問題のページへ

(1)　$A=2\sin x+\sin y$ ……①，$B=2\cos x+\cos y$ ……②に対して，

$$A^2+B^2=4\sin^2 x+4\sin x\sin y+\sin^2 y+4\cos^2 x+4\cos x\cos y+\cos^2 y$$
$$=4+1+4\cos(x-y)=5+4\cos(x-y)$$

よって，$\cos(x-y)=\dfrac{1}{4}(A^2+B^2-5)$ ………③

(2)　$A=1$ のとき，③より，$\cos(x-y)=\dfrac{1}{4}(1+B^2-5)=\dfrac{B^2}{4}-1$

すると，$-1\leqq\cos(x-y)\leqq 1$ より，$-1\leqq\dfrac{B^2}{4}-1\leqq 1$ となり，

$$0\leqq B^2\leqq 8,\quad -2\sqrt{2}\leqq B\leqq 2\sqrt{2}$$

ここで，$B^2=8$ $(B=\pm 2\sqrt{2})$ のとき，$\cos(x-y)=1$ であり，n を整数として，

$$x-y=2n\pi,\quad y=x-2n\pi \text{ ………④}$$

(i)　$B=2\sqrt{2}$ のとき

①より $2\sin x+\sin y=1$，②より $2\cos x+\cos y=2\sqrt{2}$ となり，④から，

$$2\sin x+\sin x=1,\quad 2\cos x+\cos x=2\sqrt{2}$$

よって，$\sin x=\dfrac{1}{3}$，$\cos x=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

(ii)　$B=-2\sqrt{2}$ のとき

①より $2\sin x+\sin y=1$，②より $2\cos x+\cos y=-2\sqrt{2}$ となり，④から，

$$2\sin x+\sin x=1,\quad 2\cos x+\cos x=-2\sqrt{2}$$

よって，$\sin x=\dfrac{1}{3}$，$\cos x=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

(i)(ii)より，B は $\sin x=\dfrac{1}{3}$，$\cos x=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ のとき最大値 $2\sqrt{2}$ をとり，$\sin x=\dfrac{1}{3}$，$\cos x=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ のとき最小値 $-2\sqrt{2}$ をとる。

［解　説］

三角関数の加法定理についての有名問題の 1 つです。(2)では，大雑把に評価して，そのあと細部を詰めています。