1　　解答解説のページへ

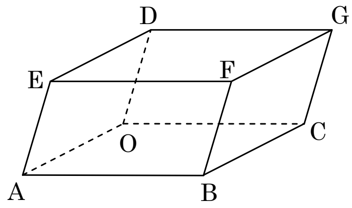
$x = t + \dfrac{1}{3t}\left(0 < t \leqq \dfrac{1}{2}\right)$とする。

(1)　xのとり得る値の範囲を求めよ。

(2)　x の方程式$x^2 + ax + b = 0$が(1)の範囲に少なくとも 1 つの解をもつような点$(a,\ b)$の存在範囲を図示せよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ



右図のような平行六面体 OABC - DEFG が xyz 空間内にあり，$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(2,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 3,\ 0)$，$\mathrm{D}(-1,\ 0,\ \sqrt{6})$ とする。辺 AB の中点を M とし，辺 DG 上の点 N を $\mathrm{MN}=4$ かつ $\mathrm{DN}<\mathrm{GN}$ を満たすように定める。

(1)　N の座標を求めよ。

(2)　3 点 E, M, N を通る平面と y 軸との交点 P を求めよ。

(3)　3 点 E, M, N を通る平面による平行六面体 OABC - DEFG の切り口の面積を求めよ。

3　解答解説のページへ

1, 2, 3, 4, 5 のそれぞれの数字が書かれた玉が 2 個ずつ，合計 10 個ある。

(1)　10 個の玉を袋に入れ，よくかき混ぜて 2 個の玉を取り出す。書かれている 2 つの数字の積が 10 となる確率を求めよ。

(2)　10 個の玉を袋に入れ，よくかき混ぜて 4 個の玉を取り出す。書かれている 4 つの数字の積が 100 となる確率を求めよ。

(3)　10 個の玉を袋に入れ，よくかき混ぜて 6 個の玉を順に取り出す。1 個目から 3 個目の玉に書かれている 3 つの数字の積と，4 個目から 6 個目の玉に書かれている 3 つの数字の積が等しい確率を求めよ。

4

解答解説のページへ

不等式$1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4$が表す xy 平面内の領域を D とする。P を円$x^2+y^2=1$上の点，Q と R を円$x^2+y^2=4$上の異なる 2 点とし，三角形 PQR は領域 D に含まれているとする。a，b を実数とし，行列$A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$の表す 1 次変換により P は$\mathrm{P}'$，Q は$\mathrm{Q}'$，R は$\mathrm{R}'$に移されるとする。このとき三角形$\mathrm{P}'\mathrm{Q}'\mathrm{R}'$が領域 D に含まれるための a，b の必要十分条件を求めよ。ただし，三角形は内部を含めて考えるものとする。

$\boxed{5}$ 解答解説のページへ

整数 n に対して，$I_n = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos((2n+1)x)}{\sin x}dx$ とする。

(1)　I_0 を求めよ。

(2)　n を正の整数とするとき，$I_n - I_{n-1}$ を求めよ。

(3)　I_5 を求めよ。

6

解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1)　n を自然数, a を正の定数として,

$$f(x)=(n+1)\{\log(a+x)-\log(n+1)\}-n(\log a-\log n)-\log x$$

とおく。$x>0$ における関数 $f(x)$ の極値を求めよ。ただし, 対数は自然対数とする。

(2)　n が 2 以上の自然数のとき, 次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}>(n+1)^{\frac{1}{n}}$$

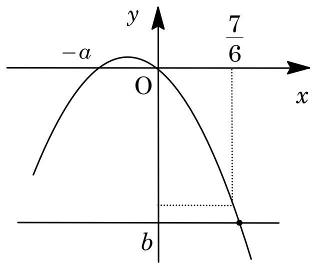
1　　問題のページへ

(1)　$x=t+\dfrac{1}{3t}$ に対して，$x'=1-\dfrac{1}{3t^2}=\dfrac{3t^2-1}{3t^2}$

すると，$0<t\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき，$x'<0$ より，$x\geqq\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{7}{6}$

また，$\displaystyle\lim_{t\to+0}x=\lim_{t\to+0}\left(t+\dfrac{1}{3t}\right)=\infty$ から，x のとり得る値の範囲は $x\geqq\dfrac{7}{6}$ である。

(2)　方程式 $x^2+ax+b=0$，すなわち $-x^2-ax=b$ が，$x\geqq\dfrac{7}{6}$ において少なくとも 1 つの解をもつ条件は，$y=-x^2-ax$ ……(＊)と $y=b$ が $x\geqq\dfrac{7}{6}$ において共有点を少なくとも 1 つもつ条件に等しい。そこで，(＊)において，$x=\dfrac{7}{6}$ のとき $y=-\dfrac{49}{36}-\dfrac{7}{6}a$ に留意すると，右図より，



(i)　$a\geqq0$ のとき　$b\leqq-\dfrac{49}{36}-\dfrac{7}{6}a$

(ii)　$a<0$ のとき　(＊)から，

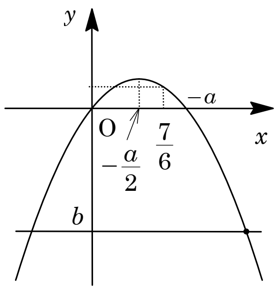
$y=-\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{a^2}{4}$

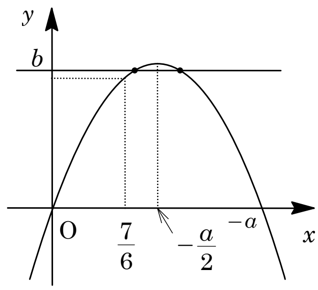
・$-\dfrac{a}{2}<\dfrac{7}{6}\left(-\dfrac{7}{3}<a<0\right)$

$b\leqq-\dfrac{49}{36}-\dfrac{7}{6}a$

・$-\dfrac{a}{2}\geqq\dfrac{7}{6}\left(a\leqq-\dfrac{7}{3}\right)$

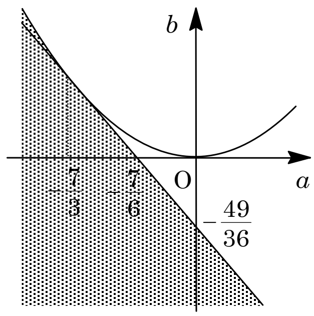
$b\leqq\dfrac{a^2}{4}$





以上より，方程式 $x^2+ax+b=0$ が，$x\geqq\dfrac{7}{6}$ に少なくとも 1 つの解をもつ点 $(a,\ b)$ の存在範囲は，右図の網点部である。

ただし，境界は領域に含む。



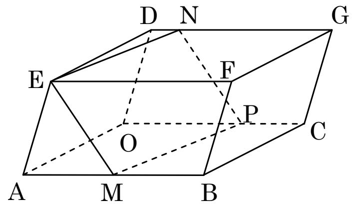
［解 説］

2 次方程式の解の配置の問題に，微分の応用を加味した基本問題です。(2)では，わかりやすいと思い，定数分離の形で解いていますが，この方法が極め付きというほどではありません。

　© 電送数学舎 2014

2

問題のページへ



(1)　$0 \leqq t \leqq 1$ として，$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} + t\overrightarrow{\mathrm{DG}}$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = (-1,\ 0,\ \sqrt{6}) + t(0,\ 3,\ 0) = (-1,\ 3t,\ \sqrt{6})$$

また，$\mathrm{M}\left(2,\ \dfrac{3}{2},\ 0\right)$ から，$\mathrm{MN} = 4$ より，

$$(-3)^2 + \left(3t - \frac{3}{2}\right)^2 + 6 = 4^2,\ 9\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

$\mathrm{DN} < \mathrm{GN}$ より $t < \dfrac{1}{2}$ となるので，$t = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$ から，$\mathrm{N}\left(-1,\ \dfrac{1}{2},\ \sqrt{6}\right)$ である。

(2)　$\mathrm{E}(1,\ 0,\ \sqrt{6})$ より，$\overrightarrow{\mathrm{EM}} = \left(1,\ \dfrac{3}{2},\ -\sqrt{6}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{EN}} = \left(-2,\ \dfrac{1}{2},\ 0\right)$ であり，点 P は y 軸上の点から $\mathrm{P}(0,\ p,\ 0)$ とおくと，r, s を定数として，$\overrightarrow{\mathrm{EP}} = r\overrightarrow{\mathrm{EM}} + s\overrightarrow{\mathrm{EN}}$ より，

$$(-1,\ p,\ -\sqrt{6}) = r\left(1,\ \frac{3}{2},\ -\sqrt{6}\right) + s\left(-2,\ \frac{1}{2},\ 0\right)$$

$$-1 = r - 2s \cdots\cdots①,\quad p = \frac{3}{2}r + \frac{1}{2}s \cdots\cdots②,\quad -\sqrt{6} = -\sqrt{6}r \cdots\cdots③$$

①③より $r = s = 1$ なので，②から $p = 2$ となり，$\mathrm{P}(0,\ 2,\ 0)$ である。

(3)　(2)より $\overrightarrow{\mathrm{EP}} = \overrightarrow{\mathrm{EM}} + \overrightarrow{\mathrm{EN}}$ から，切り口は平行四辺形となり，その面積 S は，

$$S = \sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{EM}}|^2 |\overrightarrow{\mathrm{EN}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{EM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{EN}})^2} = \sqrt{\left(1 + \frac{9}{4} + 6\right)\left(4 + \frac{1}{4}\right) - \left(-2 + \frac{3}{4}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{629}{4^2} - \frac{25}{4^2}} = \frac{\sqrt{151}}{2}$$

［解　説］

空間ベクトルの基本問題です。(2)では平面のパラメータ表示を利用していますが，平行六面体の切り口ということに注目して，(2)と(3)を一気に処理するという方法も考えられます。

© 電送数学舎 2014

３

問題のページへ

(1)　10 個の玉から 2 個を取り出す ${}_{10}\mathrm{C}_2 = 45$ 通りの場合が同様に確からしいとする。

さて，書かれている 2 つの数字の積が 10 となるのは，$10 = 2\times5$ より，${}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1 = 4$ 通りの場合があり，その確率は $\dfrac{4}{45}$ である。

(2)　10 個の玉から 4 個を取り出す ${}_{10}\mathrm{C}_4 = 210$ 通りの場合が同様に確からしいとする。

さて，書かれている 4 つの数字の積が 100 となるのは，$100 = 2^2\times5^2$ より，次の 2 つの場合がある。

(i)　4 つの数字が $(2,\ 2,\ 5,\ 5)$ の場合　1 通り

(ii)　4 つの数字が $(1,\ 4,\ 5,\ 5)$ の場合　${}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1 = 4$ 通り

(i)(ii)より，求める確率は，$\dfrac{1+4}{210} = \dfrac{1}{42}$ である。

(3)　10 個の玉から 6 個を順に取り出す ${}_{10}\mathrm{P}_6$ 通りの場合が同様に確からしいとする。

さて，1 個目から 3 個目，4 個目から 6 個目に書かれている数字の組合せを，それぞれ A, B とすると，A の 3 つの数字の積と B の 3 つの数字の積が等しい場合は，

(i)　$A = B$ のとき

数字の選び方が ${}_5\mathrm{C}_3$ 通り，A, B への数字の振り分けが 2^3 通り，出る順序が $3!\times3!$ 通りより，${}_5\mathrm{C}_3\times2^3\times3!\times3! = 5\times2^4\times(3!)^2$ 通りである。

(ii)　$A = (2,\ 2,\ 3)$, $B = (1,\ 4,\ 3)$，または $A = (1,\ 4,\ 3)$, $B = (2,\ 2,\ 3)$ のとき

A, B への数字の振り分けが $2\times2^2 = 2^3$ 通り，出る順序が $3!\times3!$ 通りより，$(2^3\times3!\times3!)\times2 = 2^4\times(3!)^2$ 通りである。

(iii)　$A = (2,\ 2,\ 5)$, $B = (1,\ 4,\ 5)$，または $A = (1,\ 4,\ 5)$, $B = (2,\ 2,\ 5)$ のとき

(ii)と同様に，$(2^3\times3!\times3!)\times2 = 2^4\times(3!)^2$ 通りである。

(i)～(iii)より，求める確率は，

$$\frac{(5+1+1)\times2^4\times(3!)^2}{{}_{10}\mathrm{P}_6} = \frac{7\times2^4\times(3!)^2}{10\times9\times8\times7\times6\times5} = \frac{2}{75}$$

［解　説］

$2\times2 = 1\times4$ に注目するために(2)の設問があり，それが(3)へとつながっています。注意深さの要求される問題です。

© 電送数学舎 2014

4

問題のページへ

まず，$a=b=0$ のときは $A=O$ となり，P，Q，R は原点に移されるので不適である。

次に，$a\neq 0$ または $b\neq 0$ のときは，

$$A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}=\sqrt{a^2+b^2}\begin{pmatrix} \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}$$

ここで，$r=\sqrt{a^2+b^2}$，$\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ とおくと，

$$A=r\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

これより，行列 A によって表される 1 次変換は，原点のまわりに θ だけ回転した後，原点との距離を r 倍する相似変換である。

すると，円 $x^2+y^2=1$ 上の点 P，円 $x^2+y^2=4$ 上の異なる 2 点 Q，R は，それぞれ円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 P'，円 $x^2+y^2=4r^2$ 上の異なる 2 点 Q'，R' に移される。

そこで，三角形 $\mathrm{P'Q'R'}$ が領域 $D:1\leqq x^2+y^2\leqq 4$ に含まれるためには，$1\leqq r^2\leqq 4$ かつ $1\leqq 4r^2\leqq 4$ より，$r^2=1$ すなわち $r=1$ であることが必要である。

逆に，このとき，三角形 $\mathrm{P'Q'R'}$ は三角形 PQR を原点まわりに θ だけ回転したものとなるので，三角形 $\mathrm{P'Q'R'}$ は領域 D に含まれる。

以上より，求める条件は $r=1$，すなわち $a^2+b^2=1$ である。

［解 説］

与えられた行列 A による 1 次変換が，回転・拡大を表すという知識だけの問題です。上の解答例はその説明です。

© 電送数学舎 2014

$\boxed{5}$ 問題のページへ

(1) $I_0=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x}dx=\Big[\log|\sin x|\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\log 1-\log\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\log 2$

(2) $I_n-I_{n-1}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(2n+1)x-\cos(2n-1)x}{\sin x}dx$ となり，

$$\cos(2n+1)x-\cos(2n-1)x=-2\sin\frac{(2n+1+2n-1)x}{2}\sin\frac{(2n+1-2n+1)x}{2}$$
$$=-2\sin 2nx\sin x$$

よって，$I_n-I_{n-1}=-2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2nx\,dx=\frac{2}{2n}\Big[\cos 2nx\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{n}\Big(\cos n\pi-\cos\frac{n}{2}\pi\Big)$

(i) n が偶数$(n=2k)$のとき

$$I_n-I_{n-1}=\frac{1}{2k}(\cos 2k\pi-\cos k\pi)=\frac{1}{2k}\{1-(-1)^k\}=\frac{1}{n}\Big\{1-(-1)^{\frac{n}{2}}\Big\}$$

(ii) n が奇数$(n=2k-1)$のとき

$$I_n-I_{n-1}=\frac{1}{2k-1}\Big\{\cos(2k-1)\pi-\cos\frac{2k-1}{2}\pi\Big\}=\frac{1}{2k-1}(-1-0)=-\frac{1}{n}$$

(3) (2)の結果を用いて，$I_5-I_4=-\frac{1}{5}$，$I_4-I_3=\frac{1}{4}(1-1)=0$，$I_3-I_2=-\frac{1}{3}$

$I_2-I_1=\frac{1}{2}(1+1)=1$，$I_1-I_0=-\frac{1}{1}=-1$

(1)より，$I_0=\frac{1}{2}\log 2$ を用いて，

$$I_5=\frac{1}{2}\log 2+\Big(-1+1-\frac{1}{3}+0-\frac{1}{5}\Big)=\frac{1}{2}\log 2-\frac{8}{15}$$

［解 説］

定積分の計算問題です。計算ミスに要注意だけです。

© 電送数学舎 2014

$\boxed{6}$

問題のページへ

(1)　$f(x)=(n+1)\{\log(a+x)-\log(n+1)\}-n(\log a-\log n)-\log x$ に対して,

$$f'(x)=\frac{n+1}{a+x}-\frac{1}{x}=\frac{nx-a}{x(a+x)}$$

すると，$f(x)$ の増減は右表のようになり，$f(x)$ は $x=\dfrac{a}{n}$ において極小となる。極小値は,

x	0	$\cdots$	$\frac{a}{n}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

$$f\Bigl(\frac{a}{n}\Bigr)=(n+1)\Bigl\{\log\frac{(n+1)a}{n}-\log(n+1)\Bigr\}-n\log\frac{a}{n}-\log\frac{a}{n}=0$$

(2)　$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}$ とおき，$n\geqq 2$ のとき $S_n>n(n+1)^{\frac{1}{n}}$ を数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=2$ のとき　$S_2-2\cdot 3^{\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{1}+\dfrac{3}{2}-2\sqrt{3}=\dfrac{1}{2}(7-4\sqrt{3})>0$ となり成立する。

(ii)　$n=m$ のとき　$S_m>m(m+1)^{\frac{1}{m}}$ であると仮定すると,

$$\log S_m>\log m(m+1)^{\frac{1}{m}}=\log m+\frac{1}{m}\log(m+1)\cdots\cdots\cdots①$$

さて，$T_{m+1}=\log S_{m+1}-\log(m+1)(m+2)^{\frac{1}{m+1}}$ とおくと,

$$T_{m+1}=\log\Bigl(S_m+\frac{m+2}{m+1}\Bigr)-\log(m+1)-\frac{1}{m+1}\log(m+2)\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，(1)において $f(x)\geqq 0$ から,

$$(n+1)\{\log(a+x)-\log(n+1)\}\geqq n(\log a-\log n)+\log x$$

$$\log(a+x)-\log(n+1)\geqq\frac{n}{n+1}(\log a-\log n)+\frac{1}{n+1}\log x$$

そこで，$a=S_m$，$x=\dfrac{m+2}{m+1}$，$n=m$ とおくと,

$$\log\Bigl(S_m+\frac{m+2}{m+1}\Bigr)-\log(m+1)\geqq\frac{m}{m+1}(\log S_m-\log m)+\frac{1}{m+1}\log\frac{m+2}{m+1}$$

②より，
$$T_{m+1}\geqq\frac{m}{m+1}(\log S_m-\log m)+\frac{1}{m+1}\log\frac{m+2}{m+1}-\frac{1}{m+1}\log(m+2)$$
$$=\frac{m}{m+1}\Bigl\{\log S_m-\log m-\frac{1}{m}\log(m+1)\Bigr\}$$

すると，①から $T_{m+1}>0$ となり，$\log S_{m+1}>\log(m+1)(m+2)^{\frac{1}{m+1}}$ から,

$$S_{m+1}>(m+1)(m+2)^{\frac{1}{m+1}}$$

(i)(ii)より，$n\geqq 2$ のとき $S_n>n(n+1)^{\frac{1}{n}}$，すなわち $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}>(n+1)^{\frac{1}{n}}$ である。

［解　説］

かなりの時間を費やしました。その原因は(1)の誘導が利用しにくいためです。

© 電送数学舎 2014