**1**

解答解説のページへ

次の性質をもつ数列$\{a_n\}$を考える。

$$a_1=3,\ \ a_{n+1}>a_n,\ \ {a_n}^2-2a_na_{n+1}+{a_{n+1}}^2=3(a_n+a_{n+1})\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1)　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，$a_n+a_{n+2}$ を $a_{n+1}$ を用いて表せ。

(2)　$b_n=a_{n+1}-a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$により定まる数列$\{b_n\}$の一般項を求めよ。

(3)　数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

$t>0$ を実数とする。座標平面において，3 点 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$，$\mathrm{B}(2,\ 0)$，$\mathrm{P}(t,\ \sqrt{3}t)$ を頂点とする三角形 ABP を考える。

(1)　三角形 ABP が鋭角三角形となるような $t$ の範囲を求めよ。

(2)　三角形 ABP の垂心の座標を求めよ。

(3)　辺 AB, BP, PA の中点をそれぞれ M, Q, R とおく。$t$ が(1)で求めた範囲を動くとき，三角形 ABP を線分 MQ, QR, RM で折り曲げてできる四面体の体積の最大値と，そのときの $t$ の値を求めよ。

**3**

解答解説のページへ

サイコロを 3 回投げて出た目の数を順に $p_1$，$p_2$，$p_3$ とし，$x$ の 2 次方程式

$$2p_1x^2+p_2x+2p_3=0 \quad \cdots\cdots\cdots(*)$$

を考える。

(1) 方程式$(*)$が実数解をもつ確率を求めよ。

(2) 方程式$(*)$が実数でない 2 つの複素数解 $\alpha$，$\beta$ をもち，かつ $\alpha\beta=1$ が成り立つ確率を求めよ。

**4**

解答解説のページへ

$a>0$ を実数とする。関数 $f(t)=-4t^3+(a+3)t$ の $0\leqq t\leqq 1$ における最大値を $M(a)$ とする。

(1)　$M(a)$ を求めよ。

(2)　実数 $x>0$ に対し，$g(x)=M(x)^2$ とおく。$xy$ 平面において，関数 $y=g(x)$ のグラフに点 $(s,\ g(s))$ で接する直線が原点を通るとき，実数 $s>0$ とその接線の傾きを求めよ。

(3)　$a$ が正の実数全体を動くとき，$k=\dfrac{M(a)}{\sqrt{a}}$ の最小値を求めよ。

**1**　　　　問題のページへ

(1)　条件より，$a_n{}^2-2a_na_{n+1}+a_{n+1}{}^2=3(a_n+a_{n+1})$ ……①なので,

$$a_{n+1}{}^2-2a_{n+1}a_{n+2}+a_{n+2}{}^2=3(a_{n+1}+a_{n+2})\ \cdots\cdots②$$

②−①より，$a_{n+2}{}^2-a_n{}^2-2a_{n+1}(a_{n+2}-a_n)=3(a_{n+2}-a_n)$

ここで，$a_{n+2}>a_{n+1}>a_n$ から，$a_{n+2}-a_n>0$ となり，

$$a_{n+2}+a_n-2a_{n+1}=3,\ a_{n+2}+a_n=2a_{n+1}+3\ \cdots\cdots③$$

(2)　③より，$a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=3$ となり，$(a_{n+2}-a_{n+1})-(a_{n+1}-a_n)=3$ ……④

ここで，$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと，④より，$b_{n+1}-b_n=3$ となり，

$$b_n=b_1+3(n-1)\ \cdots\cdots⑤$$

さて，①より，$a_1^2-2a_1a_2+a_2^2=3(a_1+a_2)$ となり，$a_1=3$ から，

$$9-6a_2+a_2^2=3(3+a_2),\ a_2^2-9a_2=0$$

すると，$a_2>a_1=3$ から $a_2=9$ となり，$b_1=a_2-a_1=6$

よって，⑤から，$b_n=6+3(n-1)=3(n+1)$

(3)　(2)より，$n\geqq2$ において，

$$a_n=3+\sum_{k=1}^{n-1}3(k+1)=3+3\cdot\frac{2+n}{2}(n-1)=3+\frac{3}{2}(n^2+n-2)=\frac{3}{2}n(n+1)$$

なお，この式は $n=1$ のときも成立している。

［解 説］

誘導つきの漸化式の問題です。(1)の結果が(2)へとつながり，さらに(3)へとスムーズに解いていくことができます。

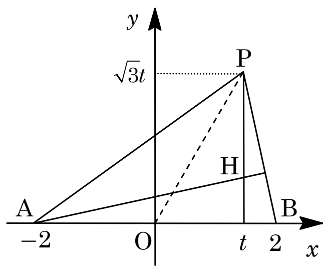
**2**

問題のページへ

(1)　$t>0$ のとき $\angle\mathrm{PAB}<\dfrac{\pi}{2}$ であるので，$\triangle\mathrm{APB}$ が鋭角三角形となる条件は $\angle\mathrm{PBA}<\dfrac{\pi}{2}$ かつ $\angle\mathrm{APB}<\dfrac{\pi}{2}$ である。

すると，$t<2$ かつ $\mathrm{OP}>2\ (2t>2)$ となる。

よって，求める $t$ の範囲は，$1<t<2$ である。




(2)　P から辺 AB に引いた垂線の式は，$x=t$ ………①

また，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(t-2,\ \sqrt{3}t)$ より，A から辺 BP に引いた垂線の式は，

$$(t-2)(x+2)+\sqrt{3}ty=0\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②を連立して，$(t-2)(t+2)+\sqrt{3}ty=0$ より，$y=\dfrac{4-t^2}{\sqrt{3}t}$

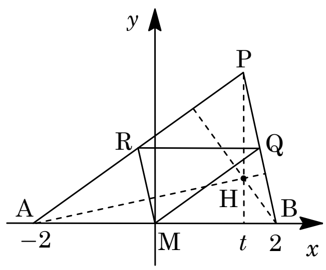
よって，$\triangle\mathrm{APB}$ の垂心 H の座標は，$\left(t,\ \dfrac{4-t^2}{\sqrt{3}t}\right)$ である。

(3)　M, Q, R は，それぞれ辺 AB, BP, PA の中点なので，

$$\mathrm{RQ}/\!/\mathrm{AB},\ \mathrm{QM}/\!/\mathrm{PA},\ \mathrm{RM}/\!/\mathrm{PB}$$

ここで，H は$\triangle\mathrm{APB}$ の垂心より，

$$\mathrm{PH}\perp\mathrm{RQ},\ \mathrm{BH}\perp\mathrm{QM},\ \mathrm{AH}\perp\mathrm{RM}\ \cdots\cdots\cdots③$$




さて，$xy$ 平面に垂直に $z$ 軸をとり，$\triangle\mathrm{ABP}$ を線分 MQ, QR, RM で折り曲げてできる四面体において，P, A, B が重なってできる頂点を C とする。

すると，③より，$s$ を正の実数として，$\mathrm{C}\left(t,\ \dfrac{4-t^2}{\sqrt{3}t},\ s\right)$ と表せる。

そこで，$\mathrm{CM}=2$ から，$t^2+\left(\dfrac{4-t^2}{\sqrt{3}t}\right)^2+s^2=4$ となり，

$$s^2=4-t^2-\frac{(4-t^2)^2}{3t^2}=\frac{-4t^4+20t^2-16}{3t^2}$$

よって，$s=\dfrac{2\sqrt{-t^4+5t^2-4}}{\sqrt{3}t}$ となり，四面体 CMQR の体積を $V$ とすると，

$$V=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\triangle\mathrm{ABP}\right)s=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}t\cdot\frac{2\sqrt{-t^4+5t^2-4}}{\sqrt{3}t}=\frac{1}{3}\sqrt{-\left(t^2-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{9}{4}}$$

$1<t<2$ から，$t^2=\dfrac{5}{2}\left(t=\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)$ のとき，$V$ は最大値 $\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{9}{4}}=\dfrac{1}{2}$ をとる。

［解　説］

一見，無関係と思える(2)と(3)ですが，(2)は(3)に不可欠な誘導です。なお，直角三角形が題材になっている類題が，北大で 2009 年に出ています。

**3**　問題のページへ

(1)　方程式 $2p_1x^2+p_2x+2p_3=0$ $\cdots(*)$が実数解をもつ条件は,

$$D={p_2}^2-16p_1p_3\geqq 0,\ \ p_2\geqq 4\sqrt{p_1p_3}\ \cdots\cdots\cdots①$$

①より，$p_2\geqq 4$ となり，$p_2=4,\ 5,\ 6$ のときを考える。

(i)　$p_2=4$ のとき　①より $1\geqq\sqrt{p_1p_3}$，$1\geqq p_1p_3$ となり，$(p_1,\ p_3)=(1,\ 1)$

(ii)　$p_2=5$ のとき　①より $\dfrac{5}{4}\geqq\sqrt{p_1p_3}$，$\dfrac{25}{16}\geqq p_1p_3$ となり，$(p_1,\ p_3)=(1,\ 1)$

(iii)　$p_2=6$ のとき　①より $\dfrac{3}{2}\geqq\sqrt{p_1p_3}$，$\dfrac{9}{4}\geqq p_1p_3$ となり，

$(p_1,\ p_3)=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1)$

(i)～(iii)より，求める確率は，$\dfrac{1+1+3}{6^3}=\dfrac{5}{216}$ である。

(2)　方程式(∗)が虚数解 $\alpha$，$\beta$ をもつ条件は，$D<0$ より $p_2<4\sqrt{p_1p_3}$ $\cdots\cdots\cdots②$

さらに，$\alpha\beta=1$ である条件は，$\dfrac{2p_3}{2p_1}=1$ より，$p_3=p_1$ $\cdots\cdots\cdots③$

②③より，$p_2<4\sqrt{{p_1}^2}=4p_1$ $\cdots\cdots\cdots④$

(i)　$p_1=p_3=1$ のとき　④より $p_2<4$，$p_2=1,\ 2,\ 3$

(ii)　$p_1=p_3\geqq 2$ のとき　$4p_1\geqq 8$ となるので，④より，$p_2=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$

(i)～(ii)より，求める確率は，$\dfrac{3+6\cdot 5}{6^3}=\dfrac{11}{72}$ である。

［解　説］

よく見かける確率の頻出題です。場合分けも複雑ではなく，内容は基本的です。

**4**　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　問題のページへ

(1)　$f(t)=-4t^3+(a+3)t$ に対して，$f'(t)=-12t^2+a+3$

$a>0$ より，$f'(t)=0$ の解は $t=\pm\sqrt{\dfrac{a+3}{12}}$ となる。

(i)　$\sqrt{\dfrac{a+3}{12}}<1\ (0<a<9)$ のとき

$0\leqq t\leqq 1$ における $f(t)$ の増減は右表のようになる。これより，$f(t)$ は $t=\sqrt{\dfrac{a+3}{12}}$ において最大値 $M(a)$ をとり，

| $t$ | $0$ | $\cdots$ | $\sqrt{\dfrac{a+3}{12}}$ | $\cdots$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(t)$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

$$M(a)=\sqrt{\frac{a+3}{12}}\Big(-4\cdot\frac{a+3}{12}+a+3\Big)=\frac{\sqrt{a+3}}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{3}(a+3)=\frac{\sqrt{3}}{9}(a+3)^{\frac{3}{2}}$$

(ii)　$\sqrt{\dfrac{a+3}{12}}\geqq 1\ (a\geqq 9)$ のとき

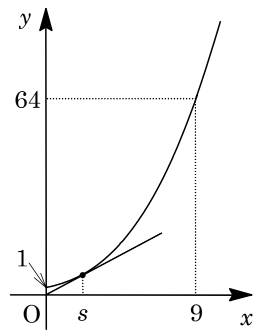
$0\leqq t\leqq 1$ において $f(t)$ は単調増加するので，$t=1$ において最大値 $M(a)$ をとり，

$$M(a)=-4+(a+3)=a-1$$

(2)　$g(x)=M(x)^2$ より，(1)から，

$$g(x)=\Big\{\frac{\sqrt{3}}{9}(x+3)^{\frac{3}{2}}\Big\}^2=\frac{1}{27}(x+3)^3\quad(0<x<9)$$

$$g(x)=(x-1)^2\quad(x\geqq 9)$$




さて，点 $(s,\ g(s))$ で接する直線が原点を通るより，

$$\frac{g(s)}{s}=g'(s)\cdots\cdots\cdots(*)$$

(i)　$0<s<9$ のとき

$(*)$より，$\dfrac{1}{27}\cdot\dfrac{(s+3)^3}{s}=\dfrac{1}{9}(s+3)^2$ から $s+3=3s$ となり，$s=\dfrac{3}{2}$

(ii)　$s\geqq 9$ のとき　$(*)$より，$\dfrac{(s-1)^2}{s}=2(s-1)$ から $s=-1$ となるが，成立しない。

(i)(ii)より，$s=\dfrac{3}{2}$ となり，このとき接線の傾きは，$\dfrac{1}{9}\Big(\dfrac{3}{2}+3\Big)^2=\dfrac{9}{4}$ である。

(3)　$k=\dfrac{M(a)}{\sqrt{a}}$ より，$k^2=\dfrac{M(a)^2}{a}=\dfrac{g(a)}{a}$ となり，$k^2$ は原点 O と点 $(a,\ g(a))$ を結ぶ直線の傾きとなる。

すると，(2)より $k^2$ の最小値は $\dfrac{9}{4}$ となるので，$k$ の最小値は $\sqrt{\dfrac{9}{4}}=\dfrac{3}{2}$ である。

［解　説］

微分法の総合問題です。(3)の分数関数を直線の傾きとみる方法は必須技法です。