**1**　　解答解説のページへ

$xy$ 平面において，次の式が表す曲線を $C$ とする。

$$x^2+4y^2=1,\ x>0,\ y>0$$

P を $C$ 上の点とする。P で $C$ に接する直線を $l$ とし，P を通り $l$ と垂直な直線を $m$ として，$x$ 軸と $y$ 軸と $m$ で囲まれてできる三角形の面積を $S$ とする。P が $C$ 上の点全体を動くとき，$S$ の最大値とそのときの P の座標を求めよ。

**2**

解答解説のページへ

$xy$ 平面において，3 次関数 $y=x^3-x$ のグラフを $C$ とし，不等式 $x^3-x>y>-x$ の表す領域を $D$ とする。また，P を $D$ の点とする。

(1) P を通り $C$ に接する直線が 3 本存在することを示せ。

(2) P を通り $C$ に接する 3 本の直線の傾きの和と積がともに 0 となるような P の座標を求めよ。

3

解答解説のページへ

サイコロを 3 回投げて出た目の数を順に $p_1$，$p_2$，$p_3$ とし，$x$ の 2 次方程式

$$2p_1x^2+p_2x+2p_3=0 \quad \cdots\cdots\cdots(*)$$

を考える。

(1)　方程式$(*)$が実数解をもつ確率を求めよ。

(2)　方程式$(*)$が実数でない 2 つの複素数解 $\alpha$，$\beta$ をもち，かつ $\alpha\beta=1$ が成り立つ確率を求めよ。

(3)　方程式$(*)$が実数でない 2 つの複素数解 $\alpha$，$\beta$ をもち，かつ $\alpha\beta<1$ が成り立つ確率を求めよ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

$a>0$ を実数とする。$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，座標平面の 3 点

$$(2n\pi,\ 0),\ \left(\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi,\ \frac{1}{\left\{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}^a}\right),\ ((2n+1)\pi,\ 0)$$

を頂点とする三角形の面積を $A_n$ とし，

$$B_n=\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\sin x}{x^a}dx\,,\ \ C_n=\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\sin^2 x}{x^a}dx$$

とおく。

(1)　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{2}{\{(2n+1)\pi\}^a}\leqq B_n\leqq\frac{2}{(2n\pi)^a}$$

(2)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n}$ を求めよ。

(3)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{C_n}$ を求めよ。

**5**

解答解説のページへ

$t>0$ を実数とする。座標平面において，3 点 $A(-2,\ 0)$，$B(2,\ 0)$，$P(t,\ \sqrt{3}t)$ を頂点とする三角形 ABP を考える。

(1)　三角形 ABP が鋭角三角形となるような $t$ の範囲を求めよ。

(2)　三角形 ABP の垂心の座標を求めよ。

(3)　辺 AB, BP, PA の中点をそれぞれ M, Q, R とおく。$t$ が(1)で求めた範囲を動くとき，三角形 ABP を線分 MQ, QR, RM で折り曲げてできる四面体の体積の最大値と，そのときの $t$ の値を求めよ。

**6**

解答解説のページへ

$k \geqq 2$ と $n$ を自然数とする。$n$ が $k$ 個の連続する自然数の和であるとき，すなわち，

$$n = m + (m+1) + \cdots + (m+k-1)$$

が成り立つような自然数 $m$ が存在するとき，$n$ を $k$-連続和とよぶことにする。ただし，自然数とは 1 以上の整数のことである。

(1)　$n$ が $k$-連続和であることは，次の条件(A), (B)の両方が成り立つことと同値であることを示せ。

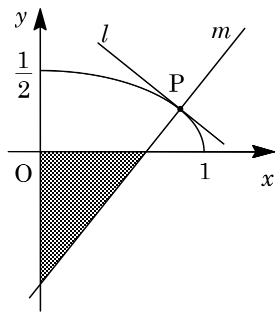
(A)　$\dfrac{n}{k} - \dfrac{k}{2} + \dfrac{1}{2}$ は整数である。　(B)　$2n > k^2$ が成り立つ。

(2)　$f$ を自然数とする。$n = 2^f$ のとき，$n$ が $k$-連続和となるような自然数 $k \geqq 2$ は存在しないことを示せ。

(3)　$f$ を自然数とし，$p$ を 2 でない素数とする。$n = p^f$ のとき，$n$ が $k$-連続和となるような自然数 $k \geqq 2$ の個数を求めよ。

**1**

問題のページへ




まず，$C: x^2+4y^2=1\ (x>0,\ y>0)$ ……①上の点 P を $\mathrm{P}\left(\cos\theta,\ \dfrac{1}{2}\sin\theta\right)\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$とおく。

①の両辺を $x$ で微分すると，$2x+8y\dfrac{dy}{dx}=0$ より，

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{4y}\quad(y\neq 0)$$

点 P において，$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\cos\theta}{2\sin\theta}$ となる。

すると，直線 $l$ の方向ベクトル，すなわち直線 $m$ の法線ベクトルの成分は，$\left(1,\ -\dfrac{\cos\theta}{2\sin\theta}\right)=\dfrac{1}{2\sin\theta}(2\sin\theta,\ -\cos\theta)$ となり，$m$ の方程式は，

$$2\sin\theta(x-\cos\theta)-\cos\theta\left(y-\frac{1}{2}\sin\theta\right)=0$$

$$4x\sin\theta-2y\cos\theta=3\sin\theta\cos\theta\ \cdots\cdots ②$$

②より，$m$ と $x$ 軸との交点は，$x=\dfrac{3\sin\theta\cos\theta}{4\sin\theta}=\dfrac{3}{4}\cos\theta$

また，$m$ と $y$ 軸との交点は，$y=-\dfrac{3\sin\theta\cos\theta}{2\cos\theta}=-\dfrac{3}{2}\sin\theta$

これより，$x$ 軸と $y$ 軸と $m$ で囲まれてできる三角形の面積 $S$ は，

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cos\theta\cdot\frac{3}{2}\sin\theta=\frac{9}{16}\sin\theta\cos\theta=\frac{9}{32}\sin 2\theta$$

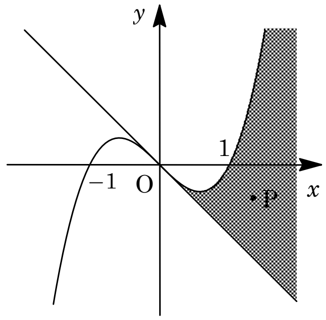
すると，$2\theta=\dfrac{\pi}{2}\left(\theta=\dfrac{\pi}{4}\right)$のとき，$S$ は最大値 $\dfrac{9}{32}$ をとる。このとき，点 P の座標は，$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$である。

## ［解 説］

楕円の接線・法線を題材とした基本的な問題です。なお，$l$ の方程式については，公式を利用しても構いません。

**2**

問題のページへ




(1)　$C: y=x^3-x$ に対して $y'=3x^2-1$ となり，$C$ 上の点 $(t,\ t^3-t)$ における接線の方程式は,

$$y-(t^3-t)=(3t^2-1)(x-t)$$
$$y=(3t^2-1)x-2t^3 \cdots\cdots\cdots①$$

さて，領域 $D$ の点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ とおくと，条件より，

$$p^3-p>q>-p \cdots\cdots\cdots②$$

そして，①が点 P を通ることより，

$$q=(3t^2-1)p-2t^3,\ -2t^3+3pt^2-p=q \cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$f(t)=-2t^3+3pt^2-p$ とおくと，③は $f(t)=q$ となり，

$$f'(t)=-6t^2+6pt=-6t(t-p)$$

②より $p>0$ なので，$f(t)$ の増減は右表のようになる。

| $t$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $p$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(t)$ | $\searrow$ | $-p$ | $\nearrow$ | $p^3-p$ | $\searrow$ |

よって，方程式③は，不等式②から 3 つの異なる実数解をもつ。すなわち点 P を通る接線の接点は 3 個となり，3 次関数のグラフ $C$ は複接線をもたないことより，接線は 3 本存在することになる。

(2)　③の解を $t=\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とおくと，この接点における接線の傾きは，それぞれ，$3\alpha^2-1$，$3\beta^2-1$，$3\gamma^2-1$ となり，条件より，これらの和と積が 0 なので，

$$(3\alpha^2-1)+(3\beta^2-1)+(3\gamma^2-1)=0 \cdots\cdots\cdots④$$
$$(3\alpha^2-1)(3\beta^2-1)(3\gamma^2-1)=0 \cdots\cdots\cdots⑤$$

$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ は対等なので，⑤より $3\alpha^2-1=0$ とすると $\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ となり，③から，

$$q=(3\alpha^2-1)p-2\alpha^3=-2\Big(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\Big)^3=\mp\frac{2}{9}\sqrt{3}$$

このとき④より，$(3\beta^2-1)+(3\gamma^2-1)=0$，$\beta^2+\gamma^2=\frac{2}{3} \cdots\cdots\cdots⑥$

(i)　$q=-\frac{2}{9}\sqrt{3}\ \Big(\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}\Big)$ のとき

③より，$-2t^3+3pt^2-p=-\frac{2}{9}\sqrt{3}$ となり，$2t^3-3pt^2+p-\frac{2}{9}\sqrt{3}=0$

$$\Big(t-\frac{1}{\sqrt{3}}\Big)\Big\{2t^2-\Big(3p-\frac{2}{\sqrt{3}}\Big)t-\sqrt{3}p+\frac{2}{3}\Big\}=0$$

これより，$\beta+\gamma=\frac{1}{2}\Big(3p-\frac{2}{\sqrt{3}}\Big)$，$\beta\gamma=\frac{1}{2}\Big(-\sqrt{3}p+\frac{2}{3}\Big)$ となり，⑥に代入すると，

$$\frac{1}{4}\Big(3p-\frac{2}{\sqrt{3}}\Big)^2-2\cdot\frac{1}{2}\Big(-\sqrt{3}p+\frac{2}{3}\Big)=\frac{2}{3},\ \frac{9}{4}p^2+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

よって，$\frac{9}{4}p^2=1$ より，$p>0$ から $p=\frac{2}{3}$ となり，点 P は $D$ の点である。

(ii)　$q=\dfrac{2}{9}\sqrt{3}\ \left(\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$のとき

③より，同様にすると，$2t^3-3pt^2+p+\dfrac{2}{9}\sqrt{3}=0$

$$\left(t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left\{2t^2-\left(3p+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)t+\sqrt{3}p+\frac{2}{3}\right\}=0$$

これより，$\beta+\gamma=\dfrac{1}{2}\left(3p+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$，$\beta\gamma=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}p+\dfrac{2}{3}\right)$となり，⑥に代入すると，

$$\frac{1}{4}\left(3p+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2-2\cdot\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}p+\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3},\ \ \frac{9}{4}p^2+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

よって，$\dfrac{9}{4}p^2=1$より，$p>0$から$p=\dfrac{2}{3}$となるが，点Pは$D$の点ではない。

(i)(ii)より，求める点Pの座標は，$\left(\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{2}{9}\sqrt{3}\right)$である。

［解 説］

3次曲線の接線の本数についての頻出問題です。ただ，(2)は$q$の値がすぐに求まることに着目して解いたのですが，かなりの計算量でした。$\alpha$，$\beta$，$\gamma$について，解と係数の関係を利用した方が，疲れなくてすむかもしれません。

**3**

問題のページへ

(1)　方程式 $2p_1x^2+p_2x+2p_3=0$ $\cdots(*)$が実数解をもつ条件は,

$$D={p_2}^2-16p_1p_3\geqq 0,\ \ p_2\geqq 4\sqrt{p_1p_3}\ \cdots\cdots\cdots①$$

①より，$p_2\geqq 4$ となり，$p_2=4,\ 5,\ 6$ のときを考える。

(i)　$p_2=4$ のとき　①より $1\geqq\sqrt{p_1p_3}$，$1\geqq p_1p_3$ となり，$(p_1,\ p_3)=(1,\ 1)$

(ii)　$p_2=5$ のとき　①より $\dfrac{5}{4}\geqq\sqrt{p_1p_3}$，$\dfrac{25}{16}\geqq p_1p_3$ となり，$(p_1,\ p_3)=(1,\ 1)$

(iii)　$p_2=6$ のとき　①より $\dfrac{3}{2}\geqq\sqrt{p_1p_3}$，$\dfrac{9}{4}\geqq p_1p_3$ となり,

$(p_1,\ p_3)=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1)$

(i)～(iii)より，求める確率は，$\dfrac{1+1+3}{6^3}=\dfrac{5}{216}$ である。

(2)　方程式(＊)が虚数解 $\alpha$，$\beta$ をもつ条件は，$D<0$ より $p_2<4\sqrt{p_1p_3}$ $\cdots\cdots\cdots②$

さらに，$\alpha\beta=1$ である条件は，$\dfrac{2p_3}{2p_1}=1$ より，$p_3=p_1$ $\cdots\cdots\cdots③$

②③より，$p_2<4\sqrt{{p_1}^2}=4p_1$ $\cdots\cdots\cdots④$

(i)　$p_1=p_3=1$ のとき　④より $p_2<4$，$p_2=1,\ 2,\ 3$

(ii)　$p_1=p_3\geqq 2$ のとき　$4p_1\geqq 8$ となるので，④より，$p_2=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$

(i)～(ii)より，求める確率は，$\dfrac{3+6\cdot 5}{6^3}=\dfrac{11}{72}$ である。

(3)　方程式(＊)が虚数解 $\alpha$，$\beta$ をもつ確率は，(1)から，$1-\dfrac{5}{216}=\dfrac{211}{216}$ である。

このとき，$\alpha\beta<1$ である条件は，(2)と同様にすると $p_3<p_1$ となる。

すると，$p_3<p_1$ の場合と $p_3>p_1$ の場合は対等なので，(2)より求める確率は，

$$\frac{1}{2}\left(\frac{211}{216}-\frac{11}{72}\right)=\frac{89}{216}$$

［解 説］

よく見かける確率の頻出題です。場合分けも複雑ではなく，内容は基本的です。(2)までが，文理共通です。

**4**

問題のページへ

(1)　$2n\pi \leqq x \leqq (2n+1)\pi$ において，$y=\dfrac{1}{x^a}$ は単調減少し，$\sin x \geqq 0$ なので，

$$\frac{1}{\{(2n+1)\pi\}^a} \leqq \frac{1}{x^a} \leqq \frac{1}{(2n\pi)^a},\quad \frac{\sin x}{\{(2n+1)\pi\}^a} \leqq \frac{\sin x}{x^a} \leqq \frac{\sin x}{(2n\pi)^a} \cdots\cdots\cdots ①$$

①の各辺を $2n\pi$ から $(2n+1)\pi$ まで積分すると，

$$\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin x}{\{(2n+1)\pi\}^a}\,dx \leqq B_n \leqq \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin x}{(2n\pi)^a}\,dx$$

すると，$\displaystyle\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin x\,dx = -\big[\cos x\big]_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} = 2$ より，

$$\frac{2}{\{(2n+1)\pi\}^a} \leqq B_n \leqq \frac{2}{(2n\pi)^a}$$

(2)　$A_n = \dfrac{1}{2}\{(2n+1)\pi - 2n\pi\}\cdot\dfrac{1}{\left\{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}^a} = \dfrac{\pi}{2\left\{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}^a}$ となり，(1)から，

$$\frac{\pi}{2\left\{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}^a}\cdot\frac{(2n\pi)^a}{2} \leqq \frac{A_n}{B_n} \leqq \frac{\pi}{2\left\{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}^a}\cdot\frac{\{(2n+1)\pi\}^a}{2}$$

すると，$\dfrac{\pi}{4}\left(\dfrac{2n}{2n+\frac{1}{2}}\right)^a \leqq \dfrac{A_n}{B_n} \leqq \dfrac{\pi}{4}\left(\dfrac{2n+1}{2n+\frac{1}{2}}\right)^a$ から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n} = \frac{\pi}{4}$ となる。

(3)　$\displaystyle\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}(1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\Big[x - \frac{1}{2}\sin 2x\Big]_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} = \frac{\pi}{2}$

(1)と同様にすると，$\dfrac{\pi}{2\{(2n+1)\pi\}^a} \leqq C_n \leqq \dfrac{\pi}{2(2n\pi)^a}$ となり，

$$\left(\frac{2n}{2n+\frac{1}{2}}\right)^a \leqq \frac{A_n}{C_n} \leqq \left(\frac{2n+1}{2n+\frac{1}{2}}\right)^a$$

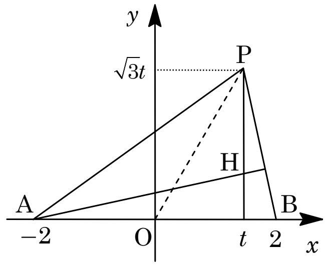
よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{C_n} = 1$ である。

［解　説］

はさみうちの原理を用いる極限の問題です。(1)の不等式は $y=\dfrac{1}{x^a}$ の単調減少性を利用するだけのものですが，$B_n$ と $A_n$ との関係を考えてなくてもよいのに考えていたら，ずいぶん時間を費やしてしまいました。

## 5

問題のページへ




(1)　$t>0$ のとき $\angle\text{PAB}<\dfrac{\pi}{2}$ であるので，△APB が鋭角三角形となる条件は $\angle\text{PBA}<\dfrac{\pi}{2}$ かつ $\angle\text{APB}<\dfrac{\pi}{2}$ である。

すると，$t<2$ かつ $\text{OP}>2$ $(2t>2)$ となる。

よって，求める $t$ の範囲は，$1<t<2$ である。

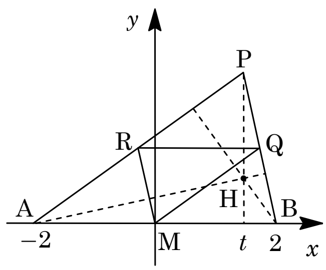
(2)　P から辺 AB に引いた垂線の式は，$x=t$ ………①

また，$\overrightarrow{\text{BP}}=(t-2,\ \sqrt{3}t)$ より，A から辺 BP に引いた垂線の式は，

$$(t-2)(x+2)+\sqrt{3}ty=0\ \cdots\cdots\cdots ②$$

①②を連立して，$(t-2)(t+2)+\sqrt{3}ty=0$ より，$y=\dfrac{4-t^2}{\sqrt{3}t}$

よって，△APB の垂心 H の座標は，$\left(t,\ \dfrac{4-t^2}{\sqrt{3}t}\right)$ である。




(3)　M, Q, R は，それぞれ辺 AB, BP, PA の中点なので，

$$\text{RQ}/\!/\text{AB},\ \text{QM}/\!/\text{PA},\ \text{RM}/\!/\text{PB}$$

ここで，H は△APB の垂心より，

$$\text{PH}\perp\text{RQ},\ \text{BH}\perp\text{QM},\ \text{AH}\perp\text{RM}\ \cdots\cdots\cdots ③$$

さて，$xy$ 平面に垂直に $z$ 軸をとり，△ABP を線分 MQ, QR, RM で折り曲げてできる四面体において，P, A, B が重なってできる頂点を C とする。

すると，③より，$s$ を正の実数として，$\text{C}\left(t,\ \dfrac{4-t^2}{\sqrt{3}t},\ s\right)$ と表せる。

そこで，$\text{CM}=2$ から，$t^2+\left(\dfrac{4-t^2}{\sqrt{3}t}\right)^2+s^2=4$ となり，

$$s^2=4-t^2-\frac{(4-t^2)^2}{3t^2}=\frac{-4t^4+20t^2-16}{3t^2}$$

よって，$s=\dfrac{2\sqrt{-t^4+5t^2-4}}{\sqrt{3}t}$ となり，四面体 CMQR の体積を $V$ とすると，

$$V=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\triangle\text{ABP}\right)s=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}t\cdot\frac{2\sqrt{-t^4+5t^2-4}}{\sqrt{3}t}=\frac{1}{3}\sqrt{-\left(t^2-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{9}{4}}$$

$1<t<2$ から，$t^2=\dfrac{5}{2}$ $\left(t=\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)$ のとき，$V$ は最大値 $\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{9}{4}}=\dfrac{1}{2}$ をとる。

### ［解　説］

一見，無関係と思える(2)と(3)ですが，(2)は(3)に不可欠な誘導です。なお，直角三角形が題材になっている類題が，北大で 2009 年に出ています。

**6**　　　　問題のページへ

(1)　$n$ が $k$-連続和であるとき，$n=m+(m+1)+\cdots+(m+k-1)$ より，

$$n=\frac{m+m+k-1}{2}\cdot k\ ,\ \ 2n=k(2m+k-1)\cdots\cdots\cdots①$$

すると，$2m=\dfrac{2n}{k}-k+1$ となり，$m=\dfrac{n}{k}-\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{2}\cdots\cdots\cdots②$

②より，$\dfrac{n}{k}-\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{2}$ は整数であり，$m\geqq1$ から $\dfrac{n}{k}-\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{2}\geqq1$ となり，$\dfrac{2n-k^2}{2k}\geqq\dfrac{1}{2}$

よって，$2n-k^2>0$ すなわち $2n>k^2$ が成り立つ。

逆に，$\dfrac{n}{k}-\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{2}$ が整数で，$2n>k^2$ のとき，$m'$ を整数として，

$$m'=\frac{n}{k}-\frac{k}{2}+\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots③$$

すると，$m'=\dfrac{2n-k^2}{2k}+\dfrac{1}{2}$ となり，$2n>k^2$ より $m'>\dfrac{1}{2}$ から $m'$ は自然数である。

このとき，③より $n=m'+(m'+1)+\cdots+(m'+k-1)$ となるので，$n$ は $k$-連続和である。

(2)　$f$ を自然数とし，$2^f$ が $k$-連続和になると仮定すると，①より，

$$2\cdot2^f=k(2m+k-1)\ ,\ \ 2^{f+1}=k(2m+k-1)\cdots\cdots\cdots④$$

ここで，$(2m+k-1)-k=2m-1$ であるが，$2m-1$ が奇数なので，$2m+k-1$ と $k$ の偶奇は異なる，すなわち $2m+k-1$ と $k$ のいずれか一方は奇数である。さらに，この奇数は，$2m+k-1>k\geqq2$ から 3 以上となる。

すると，④は不成立となり，$2^f$ が $k$-連続和となる自然数 $k\geqq2$ は存在しない。

(3)　$f$ を自然数，$p$ を 3 以上の素数として，$p^f$ が $k$-連続和となるとき，①より，

$$2p^f=k(2m+k-1)\cdots\cdots\cdots⑤$$

ここで，$k$ が偶数すなわち $k=2p^i\ (i\geqq0)$ のとき，$2m+k-1$ は奇数となり，整数 $m$ は存在する。また，$k$ が奇数すなわち $k=p^j\ (j\geqq1)$ のとき，$2m+k-1$ は偶数となり，整数 $m$ は存在する。

したがって，以下，$k$ が $2p^f$ の約数で，$m$ が自然数すなわち $k^2<2p^f\cdots\cdots⑥$ となる $k$ の個数を求める。

そこで，$p$ が 3 以上に注意して $f$ を偶奇に分けると，$l$ を自然数として，

(i)　$f$ が偶数 $(f=2l)$ の場合

$k=2p^i$ のとき，⑥より $4p^{2i}<2p^{2l}$，$p^{2i}<\dfrac{1}{2}p^{2l}$ となり，$i=0,\ 1,\ \cdots,\ l-1$

$k=p^j$ のとき，⑥より $p^{2j}<2p^{2l}$ となり，$j=1,\ 2,\ \cdots,\ l$

これより，$k$ の個数は，$l+l=2l=f$ である。

(ii)　$f$ が奇数 $(f=2l+1)$ の場合

$k=2p^i$ のとき，⑥より $4p^{2i}<2p^{2l+1}$， $p^{2i}<\dfrac{p}{2}p^{2l}$ となり， $i=0,\ 1,\ \cdots,\ l$

$k=p^j$ のとき，⑥より $p^{2j}<2p^{2l+1}=2p\cdot p^{2l}$ となり， $j=1,\ 2,\ \cdots,\ l$

これより，$k$ の個数は，$(l+1)+l=2l+1=f$ である。

(iii) $f=1$ の場合

$k=2p^i$ のとき，⑥より $4p^{2i}<2p$， $p^{2i}<\dfrac{p}{2}$ となり， $i=0$ だけである。

$k=p^j$ のとき，⑥より $p^{2j}<2p$ となり，満たす $j$ は存在しない。

これより，$k$ の個数は，$1=f$ である。

(i)～(iii)より， $p^f$ が $k$-連続和となる自然数 $k\geqq 2$ の個数は $f$ となる。

［解　説］

整数の連続和が題材となっているかなり難しめの問題です。自然数 $m$ が存在するという条件のとらえ方が問われています。なお，(3)で $f$ が奇数の場合に $f=2l-1$ としなかったのは， $f=1$ $(l=1)$ のときの記述がややこしくなるためです。