1

解答解説のページへ

平面上で原点 O と 3 点 A$(3,\ 1)$，B$(1,\ 2)$，C$(-1,\ 1)$ を考える。実数 s，t に対し，点 P を，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ により定める。以下の問いに答えよ。

(1) s，t が条件 $-1\leqq s\leqq 1$，$-1\leqq t\leqq 1$，$-1\leqq s+t\leqq 1$ を満たすとき，点 P$(x,\ y)$ の存在する範囲 D を図示せよ。

(2) 点 P が(1)で求めた範囲 D を動くとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の最大値を求め，そのときの P の座標を求めよ。

2　解答解説のページへ

放物線 $C: y=-\dfrac{1}{2}x^2$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　関数 $y=-2|x|+k$ のグラフが放物線 C と共有点をもつような実数 k の範囲を求めよ。

(2)　$a,\ b$ を実数とする。関数 $y=-2|x-a|+b$ のグラフが放物線 C と共有点をちょうど 4 個もつような点 $(a,\ b)$ 全体のなす領域 D を xy 平面に図示せよ。

(3)　(2)で求めた領域 D の面積を求めよ。

3

解答解説のページへ

ある工場で作る部品 A, B, C はネジをそれぞれ 7 個, 9 個, 12 個使っている。出荷後に残ったこれらの部品のネジをすべて外したところ，ネジが全部で 54 個あった。残った部品 A, B, C の個数をそれぞれ l, m, n として，可能性のある組$(l,\ m,\ n)$をすべて求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

銳角三角形△ABC において，頂点 A, B, C から各対辺に垂線 AD, BE, CF を下ろす。これらの垂線は垂心 H で交わる。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　四角形 BCEF と AFHE が円に内接することを示せ。

(2)　$\angle$ADE ＝ $\angle$ADF であることを示せ。

1

問題のページへ

(1)　A$(3,\ 1)$，B$(1,\ 2)$，P$(x,\ y)$ に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ より，

$$(x,\ y)=s(3,\ 1)+t(1,\ 2)=(3s+t,\ s+2t)$$

これより，$s=\dfrac{1}{5}(2x-y)$，$t=\dfrac{1}{5}(-x+3y)$ となる。

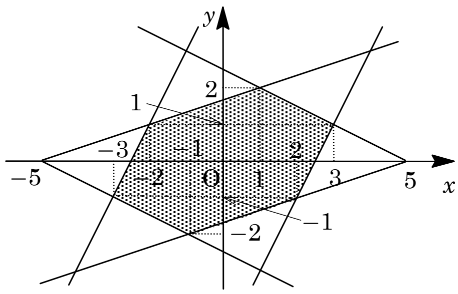
さて，条件より，$-1\leqq s\leqq 1$，$-1\leqq t\leqq 1$，$-1\leqq s+t\leqq 1$ なので，

$$-5\leqq 2x-y\leqq 5\cdots\cdots①,\ -5\leqq -x+3y\leqq 5\cdots\cdots②,\ -5\leqq x+2y\leqq 5\cdots\cdots③$$

①より，$2x-5\leqq y\leqq 2x+5$

②より，$\dfrac{1}{3}(x-5)\leqq y\leqq \dfrac{1}{3}(x+5)$

③より，$-\dfrac{1}{2}(x+5)\leqq y\leqq -\dfrac{1}{2}(x-5)$



よって，点 P の存在範囲 D は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

(2)　C$(-1,\ 1)$ に対し，$k=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-x+y$ とおくと $y=x+k$ となり，xy 平面上で傾き 1 の直線群を表す。

すると，k が最大になるのは，(1)の図から点 P が P$(-2,\ 1)$ のときになり，最大値は $-(-2)+1=3$ である。

［解 説］

ベクトルと領域に関する問題で，最初から成分表示をした解答例です。

2

問題のページへ

(1)　$C : y = -\frac{1}{2}x^2$ ……①，$y = -2|x| + k$ ……②を連立すると，

$$-\frac{1}{2}x^2 = -2|x| + k,\ -\frac{1}{2}x^2 + 2|x| = k \ \cdots\cdots\cdots ③$$

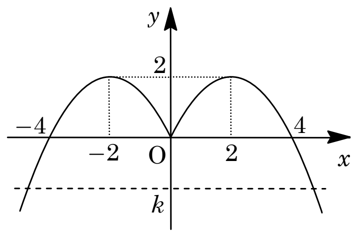
①②が共有点をもつ条件は，方程式③が実数解をもつ条件に対応し，さらに $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2|x|$ ……④と $y = k$ が共有点をもつことに等しいので，④より，

(i)　$x \geqq 0$ のとき

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2$$

(ii)　$x < 0$ のとき

$$y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 2$$



したがって，④のグラフは右図のようになり，求める条件は，$k \leqq 2$ である。

(2)　$y = -2|x-a| + b$ ……⑤に対して，①⑤を連立すると，

$$-\frac{1}{2}x^2 = -2|x-a| + b,\ -\frac{1}{2}x^2 + 2|x-a| = b \ \cdots\cdots\cdots ⑥$$

①⑤が 4 個の共有点をもつ条件は，方程式⑥が 4 個の異なる実数解をもつ条件に対応し，さらに $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2|x-a|$ ……⑦と $y = b$ が 4 個の共有点をもつことに等しいので，⑦より，

(i)　$x \geqq a$ のとき　$y = -\frac{1}{2}x^2 + 2(x-a) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2 - 2a$ ………⑧

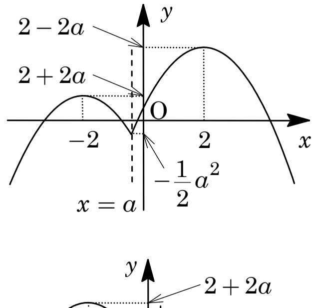
(ii)　$x < a$ のとき　$y = -\frac{1}{2}x^2 - 2(x-a) = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 2 + 2a$ ………⑨

すると，⑧と $y = b$ が 2 個の共有点，⑨と $y = b$ が 2 個の共有点をもつことになり，$2 > a$ かつ $-2 < a$ から，$-2 < a < 2$ であることが必要となる。

(a)　$-2 < a < 0$ のとき

$2 - 2a > 2 + 2a$ となり，⑦のグラフは右図のようになり，求める条件は，

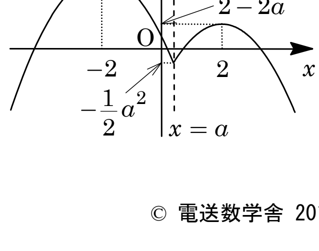
$$-\frac{1}{2}a^2 < b < 2 + 2a$$



(b)　$0 \leqq a < 2$ のとき

$2 - 2a \leqq 2 + 2a$ となり，⑦のグラフは右図のようになり，求める条件は，

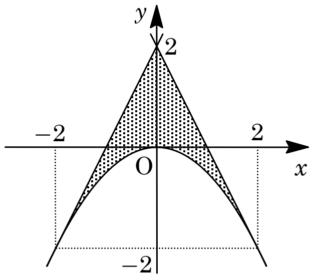
$$-\frac{1}{2}a^2 < b < 2 - 2a$$



(a)(b)より，点$(a,\ b)$全体のなす領域Dはxy平面上で，

$$-\frac{1}{2}x^2 < y < 2+2x \quad (-2 < x < 0)$$

$$-\frac{1}{2}x^2 < y < 2-2x \quad (0 \leqq x < 2)$$



よって，Dを図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含まない。

(3)　領域Dはy軸対称なので，その面積Sは，

$$S = 2\int_0^2\left(2-2x+\frac{1}{2}x^2\right)dx = \int_0^2 (x-2)^2\,dx = \frac{1}{3}\Big[(x-2)^3\Big]_0^2 = \frac{8}{3}$$

［解　説］

絶対値つき関数を題材とした，グラフの共有点の個数に関する問題です。難しい計算はないものの，量的にはかなり多めです。

3

問題のページへ

条件より，l, m, n を 0 以上の整数として，$7l+9m+12n=54$ ………(＊)

まず，$12n=54-(7l+9m)\leqq 54$ から，$n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$

また，$7l=54-9m-12n=3(18-3m-4n)$ から，l は 3 の倍数となる。

(i)　$n=0$ のとき　(＊)から，$7l+9m=54$ ……①となり，$l\leqq 7$ である。

(a)　$l=0$ のとき　①から $9m=54$ となり，$m=6$

(b)　$l=3$ のとき　①から $9m=33$ となり，m は整数でないので不適

(c)　$l=6$ のとき　①から $9m=12$ となり，m は整数でないので不適

(ii)　$n=1$ のとき　(＊)から，$7l+9m=42$ ……②となり，$l\leqq 6$ である。

(a)　$l=0$ のとき　②から $9m=42$ となり，m は整数でないので不適

(b)　$l=3$ のとき　②から $9m=21$ となり，m は整数でないので不適

(c)　$l=6$ のとき　②から $9m=0$ となり，$m=0$

(iii)　$n=2$ のとき　(＊)から，$7l+9m=30$ ……③となり，$l\leqq 4$ である。

(a)　$l=0$ のとき　③から $9m=30$ となり，m は整数でないので不適

(b)　$l=3$ のとき　③から $9m=9$ となり，$m=1$

(iv)　$n=3$ のとき　(＊)から，$7l+9m=18$ ……④となり，$l\leqq 2$ である。

(a)　$l=0$ のとき　④から $9m=18$ となり，$m=2$

(v)　$n=4$ のとき　(＊)から，$7l+9m=6$ ……⑤となり，$l=0$ のみである。

このとき，⑤から $9m=6$ となり，m は整数でないので不適

(i)～(v)より，(＊)を満たす 0 以上の整数の組 $(l,\ m,\ n)$ は，

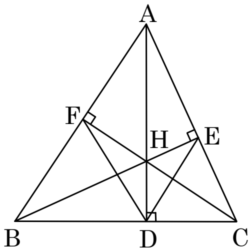
$$(l,\ m,\ n)=(0,\ 6,\ 0),\ (6,\ 0,\ 1),\ (3,\ 1,\ 2),\ (0,\ 2,\ 3)$$

［解　説］

基本的な不定方程式を解く問題ですが，文章題という意図が不明です。不良品を見込んで多く作ったとか，保管用のサンプルを作ったなどと考えていると，時間が知らぬ間に……。

4

問題のページへ



(1)　垂心が H である右図の△ABC において,

$\angle BFC = \angle BEC = 90°$

すると, 四角形 BCEF は BC を直径とする円に内接する。

また, $\angle AFH = \angle AEH = 90°$ より,

$\angle AFH + \angle AEH = 180°$

すると, 四角形 AFHE は AH を直径とする円に内接する。

(2)　(1)から, 四角形 BCEF が円に内接することより,

$\angle ECF = \angle EBF$ ………①

また, $\angle CEH + \angle CDH = 180°$ から, 四角形 CEHD が円に内接するので,

$\angle ECH = \angle HDE$, $\angle ECF = \angle ADE$ ………②

さらに, $\angle BDH + \angle BFH = 180°$ から, 四角形 BDHF が円に内接するので,

$\angle FBH = \angle HDF$, $\angle EBF = \angle ADF$ ………③

①②③より, $\angle ADE = \angle ADF$

［解 説］

円に内接する四角形を題材にした, 教科書の練習問題に掲載されているような問題です。