1

解答解説のページへ

鋭角三角形△ABC において，頂点 A, B, C から各対辺に垂線 AD, BE, CF を下ろす。これらの垂線は垂心 H で交わる。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 四角形 BCEF と AFHE が円に内接することを示せ。

(2) $\angle \mathrm{ADE} = \angle \mathrm{ADF}$ であることを示せ。

2

解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1)　6 以上の整数 n に対して不等式 $2^n > n^2 + 7$ が成り立つことを数学的帰納法により示せ。

(2)　等式 $p^q = q^p + 7$ を満たす素数の組 $(p,\ q)$ をすべて求めよ。

3

解答解説のページへ

サイコロを 3 回振って出た目の数をそれぞれ順に $a,\ b,\ c$ とする。以下の問いに答えよ。

(1)　a, b, c がある直角三角形の 3 辺の長さとなる確率を求めよ。

(2)　a, b, c がある鈍角三角形の 3 辺の長さとなる確率を求めよ。

4

解答解説のページへ

多項式$P(x)$を，$P(x)=\dfrac{(x+i)^7-(x-i)^7}{2i}$により定める。ただし，$i$ は虚数単位とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$P(x)=a_0x^7+a_1x^6+a_2x^5+a_3x^4+a_4x^3+a_5x^2+a_6x+a_7$ とするとき，係数a_0，$\cdots$，a_7をすべて求めよ。

(2)　$0<\theta<\pi$ に対して，$P\left(\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)=\dfrac{\sin 7\theta}{\sin^7\theta}$ が成り立つことを示せ。

(3)　(1)で求めたa_1，a_3，a_5，a_7を用いて，多項式$Q(x)=a_1x^3+a_3x^2+a_5x+a_7$を考える。$\theta=\dfrac{\pi}{7}$ として，$k=1,\ 2,\ 3$ について，$x_k=\dfrac{\cos^2 k\theta}{\sin^2 k\theta}$ とおく。このとき，$Q(x_k)=0$が成り立つことを示し，$x_1+x_2+x_3$の値を求めよ。

$\boxed{5}$ 解答解説のページへ

空間内に，直線 l で交わる 2 平面 α，β と交線 l 上の 1 点 O がある。さらに，平面 α 上の直線 m と平面 β 上の直線 n を，どちらも O を通り l に垂直にとる。m，n 上にそれぞれ点 P, Q があり，$\mathrm{OP}=\sqrt{3}$，$\mathrm{OQ}=2$，$\mathrm{PQ}=1$ であるとする。線分 PQ 上の動点 T について，$\mathrm{PT}=t$ とおく。点 T を中心とした半径 $\sqrt{2}$ の球 S を考える。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) S の平面 α による切り口の面積を t を用いて表せ。

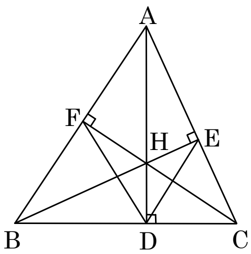
(2) S の平面 α による切り口の面積と S の平面 β による切り口の面積の和を $f(t)$ とおく。T が線分 PQ 上を動くとき，$f(t)$ の最大値と，そのときの t の値を求めよ。

$\boxed{6}$ 解答解説のページへ

関数 $f(x)=\int_0^{\pi}\left|\sin(t-x)-\sin 2t\right|dt$ の区間 $0 \leqq x \leqq \pi$ における最大値と最小値を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　垂心が H である右図の△ABC において,

$\angle BFC=\angle BEC=90^\circ$

すると，四角形 BCEF は BC を直径とする円に内接する。

また，$\angle AFH=\angle AEH=90^\circ$ より，

$\angle AFH+\angle AEH=180^\circ$

すると，四角形 AFHE は AH を直径とする円に内接する。

(2)　(1)から，四角形 BCEF が円に内接することより，

$\angle ECF=\angle EBF$ ………①

また，$\angle CEH+\angle CDH=180^\circ$ から，四角形 CEHD が円に内接するので,

$\angle ECH=\angle HDE$，$\angle ECF=\angle ADE$ ………②

さらに，$\angle BDH+\angle BFH=180^\circ$ から，四角形 BDHF が円に内接するので,

$\angle FBH=\angle HDF$，$\angle EBF=\angle ADF$ ………③

①②③より，$\angle ADE=\angle ADF$

［解 説］

円に内接する四角形を題材にした，教科書の練習問題に掲載されているような問題です。

$\boxed{2}$ 問題のページへ

(1) 6以上の整数 n に対して，$2^n > n^2+7$ が成り立つことを数学的帰納法で示す。

(i) $n=6$ のとき　$2^n = 64$，$n^2+7 = 43$ より成り立つ。

(ii) $n=k$ のとき　$2^k > k^2+7$ と仮定すると，$2^{k+1} > 2(k^2+7)$ となり，

$$2(k^2+7)-\{(k+1)^2+7\} = k^2-2k+6 = k(k-2)+6 > 0$$

すると，$2(k^2+7) > (k+1)^2+7$ から，$2^{k+1} > (k+1)^2+7$

これより，$n=k+1$ のときも成り立つ。

(i)(ii)より，6以上の整数 n に対して，$2^n > n^2+7$ が成り立つ。

(2) 素数 p, q に対して，$p^q = q^p+7$ ………①

(i) $p=2$ のとき　①から $2^q = q^2+7$ ………②

(1)から $q \geqq 6$ すなわち7以上の素数について，$2^q > q^2+7$ となり②は成立しない。そこで，$q=2,\ 3,\ 5$ のときを調べる。

(a) $q=2$ のとき　$2^q=4$，$q^2+7=11$ となり，②は成立しない。

(b) $q=3$ のとき　$2^q=8$，$q^2+7=16$ となり，②は成立しない。

(c) $q=5$ のとき　$2^q=32$，$q^2+7=32$ となり，②は成立する。

(ii) $p \geqq 3$ のとき　p は奇数となり，$q \geqq 3$ すなわち q も奇数の場合については，p^q，q^p はともに奇数から，①は両辺の偶奇が異なり，成立しない。

そこで，$q=2$ のときについて，①から $p^2 = 2^p+7$ ………③

(1)から $p \geqq 6$ すなわち7以上の素数について，$2^p+7 > (p^2+7)+7$ となり③は成立しない。そこで，$p=3,\ 5$ のときを調べる。

(a) $p=3$ のとき　$p^2=9$，$2^p+7=15$ となり，③は成立しない。

(b) $p=5$ のとき　$p^2=25$，$2^p+7=39$ となり，③は成立しない。

(i)(ii)より，①を満たす素数 p, q は，$(p,\ q)=(2,\ 5)$ のみである。

［解 説］

素数が題材の誘導つき不定方程式の問題です。素数で偶数なのは2だけということがポイントになっています。なお，(2)で p^q と q^p の偶奇が異なる点に注目すると，少し解答例を短縮できます。

3

問題のページへ

(1)　$a,\ b,\ c$ が 3 辺の長さの三角形が直角三角形となるのは，斜辺の長さが c のとき，

$$a^2+b^2=c^2\cdots\cdots\cdots①$$

そこで，a^2 と b^2，およびその和をまとめると，右表のようになる。

a^2 \ b^2	1	4	9	16	25	36
1	2	5	10	17	26	37
4	5	8	13	20	29	40
9	10	13	18	25	34	45
16	17	20	25	32	41	52
25	26	29	34	41	50	61
36	37	40	45	52	61	72

すると，和が平方数なのは 25 だけより，①を満たすのは，

$$(a,\ b,\ c)=(3,\ 4,\ 5),\ (4,\ 3,\ 5)$$

また，斜辺の長さが $a,\ b$ の場合も同様なので，求める直角三角形となる確率は，$\dfrac{2\times3}{6^3}=\dfrac{1}{36}$ である。

(2)　$a,\ b,\ c$ が 3 辺の長さの三角形が鈍角三角形となるのは，最大辺の長さが c のとき，

$$a+b>c\cdots\cdots\cdots②,\ \ a^2+b^2<c^2\cdots\cdots\cdots③$$

まず，$c=1,\ 2$ では成立しないので $c\geqq3$ となり，それぞれの場合を(1)の表をもとに調べる。

(i)　$c=3$ のとき

②より $a+b>3$，③より $a^2+b^2<9$ から，$(a,\ b)=(2,\ 2)$

(ii)　$c=4$ のとき

②より $a+b>4$，③より $a^2+b^2<16$ から，$(a,\ b)=(2,\ 3),\ (3,\ 2)$

(iii)　$c=5$ のとき

②より $a+b>5$，③より $a^2+b^2<25$ から，$(a,\ b)=(2,\ 4),\ (3,\ 3),\ (4,\ 2)$

(iv)　$c=6$ のとき

②より $a+b>6$，③より $a^2+b^2<36$ から，

$$(a,\ b)=(2,\ 5),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (5,\ 2),\ (3,\ 5),\ (4,\ 4),\ (5,\ 3)$$

(i)～(iv)より，$(a,\ b)$ の組は $1+2+3+7=13$ 通りとなる。

また，最大辺の長さが $a,\ b$ の場合も同様に 13 通りずつなので，求める鈍角三角形となる確率は，$\dfrac{13\times3}{6^3}=\dfrac{13}{72}$ である。

［解　説］

丁寧に数え上げるタイプの確率の問題です。このような場合は，表を作ると数えもれが防げます。

4

問題のページへ

(1) $P(x)=\dfrac{(x+i)^7-(x-i)^7}{2i}=\dfrac{2({}_7\mathrm{C}_1x^6i+{}_7\mathrm{C}_3x^4i^3+{}_7\mathrm{C}_5x^2i^5+i^7)}{2i}$

$=\dfrac{7ix^6-35ix^4+21ix^2-i}{i}=7x^6-35x^4+21x^2-1$

ここで，$P(x)=a_0x^7+a_1x^6+a_2x^5+a_3x^4+a_4x^3+a_5x^2+a_6x+a_7$ から，

$a_0=a_2=a_4=a_6=0$，$a_1=7$，$a_3=-35$，$a_5=21$，$a_7=-1$

(2) ド・モアブルの定理を用いると，

$$P\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)=\frac{1}{2i}\left\{\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+i\right)^7-\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-i\right)^7\right\}$$
$$=\frac{1}{2i\sin^7\theta}\left\{(\cos\theta+i\sin\theta)^7-(\cos\theta-i\sin\theta)^7\right\}$$
$$=\frac{1}{2i\sin^7\theta}\left\{(\cos7\theta+i\sin7\theta)-(\cos7\theta-i\sin7\theta)\right\}$$
$$=\frac{2i\sin7\theta}{2i\sin^7\theta}=\frac{\sin7\theta}{\sin^7\theta}\cdots\cdots\cdots(*)$$

(3) $P(x)=a_1x^6+a_3x^4+a_5x^2+a_7$，$Q(x)=a_1x^3+a_3x^2+a_5x+a_7$ より，$x>0$ で，

$Q(x)=P(\sqrt{x})$

さて，$\theta=\dfrac{\pi}{7}$ のとき $\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}>0$，$\dfrac{\cos2\theta}{\sin2\theta}>0$，$\dfrac{\cos3\theta}{\sin3\theta}>0$ から，(*)を用いて，

$$Q(x_1)=Q\left(\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right)=P\left(\left|\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right|\right)=P\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)=\frac{\sin7\theta}{\sin^7\theta}=\frac{\sin\pi}{\sin^7\theta}=0$$
$$Q(x_2)=Q\left(\frac{\cos^22\theta}{\sin^22\theta}\right)=P\left(\left|\frac{\cos2\theta}{\sin2\theta}\right|\right)=P\left(\frac{\cos2\theta}{\sin2\theta}\right)=\frac{\sin14\theta}{\sin^72\theta}=\frac{\sin2\pi}{\sin^72\theta}=0$$
$$Q(x_3)=Q\left(\frac{\cos^23\theta}{\sin^23\theta}\right)=P\left(\left|\frac{\cos3\theta}{\sin3\theta}\right|\right)=P\left(\frac{\cos3\theta}{\sin3\theta}\right)=\frac{\sin21\theta}{\sin^73\theta}=\frac{\sin3\pi}{\sin^73\theta}=0$$

さらに，$x_1=\dfrac{1}{\tan^2\frac{\pi}{7}}$，$x_2=\dfrac{1}{\tan^2\frac{2\pi}{7}}$，$x_3=\dfrac{1}{\tan^2\frac{3\pi}{7}}$ なので，x_1，x_2，x_3 は互いに異なる。よって，x_1，x_2，x_3 は 3 次方程式 $Q(x)=0$ の異なる 3 つの解となり，

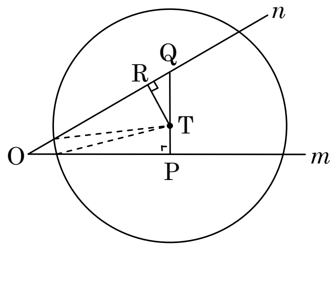
$$x_1+x_2+x_3=-\frac{a_3}{a_1}=5$$

［解 説］

一見，複素数の難問という構成ですが，細かな誘導のため，それに従えば最後の結論まで導けるようになっています。ただ，いろいろな定理が絡んでいますが。

5

問題のページへ



(1) 2 平面α，βの交線l上の点 O を通りlに垂直に，α上に直線m，β上に直線nがある。そして，m上に点 P，n上に点 Q を，$\mathrm{OP}=\sqrt{3}$，$\mathrm{OQ}=2$，$\mathrm{PQ}=1$であるようにとる。

すると，点 O を通りlに垂直な平面での位置関係は右図のようになり，$\angle\mathrm{POQ}=30°$，$\angle\mathrm{OPQ}=90°$である。

さて，線分 PQ 上に$\mathrm{PT}=t$である点 T をとり，中心が T で半径が$\sqrt{2}$の球Sの平面αによる切り口は中心 P の円になり，その半径をr_1とおくと，

$$r_1=\sqrt{(\sqrt{2})^2-t^2}=\sqrt{2-t^2}$$

よって，この円の面積は，$\pi {r_1}^2=\pi(2-t^2)$である。

(2) 点 T から直線nに垂線 TR を引くと，$\mathrm{TR}=\mathrm{TQ}\cos 30°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1-t)$

さて，球Sの平面βによる切り口は中心 R の円になり，その半径をr_2とおくと，

$$r_2=\sqrt{(\sqrt{2})^2-\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}(1-t)\right\}^2}=\sqrt{\frac{5+6t-3t^2}{4}}$$

すると，Sのαによる切り口の面積とβによる切り口の面積の和$f(t)$は，

$$f(t)=\pi {r_1}^2+\pi {r_2}^2=\pi(2-t^2)+\frac{\pi}{4}(5+6t-3t^2)=\frac{\pi}{4}(-7t^2+6t+13)$$

$$=\frac{\pi}{4}\left\{-7\left(t-\frac{3}{7}\right)^2+\frac{100}{7}\right\}=-\frac{7}{4}\pi\left(t-\frac{3}{7}\right)^2+\frac{25}{7}\pi$$

よって，$0\leqq t\leqq 1$から，$f(t)$は$t=\dfrac{3}{7}$のとき最大値$\dfrac{25}{7}\pi$をとる。

［解 説］

球と平面の交わりについての問題です。問題文の説明は長いですが，位置関係がわかりやすく設定されていますので，方針が混乱することはないと思えます。

$\boxed{6}$ 問題のページへ

$f(x)=\int_0^{\pi}\left|\sin(t-x)-\sin 2t\right|dt$ に対し，$g(t)=\sin(t-x)-\sin 2t$ とおくと，

$$g(t)=2\cos\frac{3t-x}{2}\sin\frac{-t-x}{2}=-2\cos\frac{3t-x}{2}\sin\frac{t+x}{2}$$

すると，$0\leqq t\leqq\pi$，$0\leqq x\leqq\pi$ において，$0\leqq\frac{t+x}{2}\leqq\pi$ から $\sin\frac{t+x}{2}\geqq 0$

また，$-\frac{\pi}{2}\leqq\frac{3t-x}{2}\leqq\frac{3}{2}\pi$ より，$\cos\frac{3t-x}{2}$ は $\frac{3t-x}{2}=\frac{\pi}{2}\left(t=\frac{\pi+x}{3}\right)$ の前後で符号が変化し，$0\leqq t\leqq\frac{\pi+x}{3}$ のとき $g(t)\leqq 0$，$\frac{\pi+x}{3}\leqq t\leqq\pi$ のとき $g(t)\geqq 0$ となるので，

$$\begin{aligned}
f(x)&=\int_0^{\pi}\left|g(t)\right|dt=-\int_0^{\frac{\pi+x}{3}}g(t)dt+\int_{\frac{\pi+x}{3}}^{\pi}g(t)dt\\
&=-2\int_0^{\frac{\pi+x}{3}}g(t)dt+\int_0^{\pi}g(t)dt\\
&=2\Big[\cos(t-x)-\frac{1}{2}\cos 2t\Big]_0^{\frac{\pi+x}{3}}-\Big[\cos(t-x)-\frac{1}{2}\cos 2t\Big]_0^{\pi}\\
&=2\cos\frac{\pi-2x}{3}-2\cos(-x)-\cos\frac{2(\pi+x)}{3}+1-\cos(\pi-x)+\cos(-x)\\
&=2\cos\frac{\pi-2x}{3}-\cos\frac{2\pi+2x}{3}+1=2\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{2}{3}x\right)-\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{2}{3}x\right)+1\\
&=\cos\frac{2}{3}x+\sqrt{3}\sin\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}\cos\frac{2}{3}x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{2}{3}x+1\\
&=\frac{3\sqrt{3}}{2}\sin\frac{2}{3}x+\frac{3}{2}\cos\frac{2}{3}x+1=3\sin\left(\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)+1
\end{aligned}$$

よって，$0\leqq x\leqq\pi$ から $\frac{\pi}{6}\leqq\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{6}\leqq\frac{5}{6}\pi$ となり，$f(x)$ は，$\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}\left(x=\frac{\pi}{2}\right)$ のとき最大値 $3+1=4$，$\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，$\frac{5}{6}\pi$ $(x=0,\ \pi)$ のとき最小値 $3\cdot\frac{1}{2}+1=\frac{5}{2}$ をとる。

［解 説］

定積分の計算について，注意深さの要求される問題です。なお，解答例では省略しましたが，$y=\sin(t-x)$ と $y=\sin 2t$ のグラフをアバウトにかいて，まず絶対値の中の符号の見当をつけています。